2021-2022 **Devoir surveillé 1 - version difficile** PSI

# Devoir surveillé 1 - version difficile

**Quand les nombres se transcendent**

Un nombre réel $a$ est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme $P$ non nul à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Un tel polynôme $P$ est appelé un polynôme annulateur de $a$ (On attire l'attention du lecteur sur le fait que les coefficients du polynôme sont dans $\mathbb{Q}$ et non dans $\mathbb{R}$ car sinon tout nombre réel $a$ serait algébrique puisqu'il serait racine du polynôme $X - a$). Tout nombre réel non algébrique est appelé un nombre transcendant. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres algébriques.

**Partie I. Quelques exemples**

1. Montrer que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{2}$ sont des nombres algébriques
2. Montrer que tout nombre rationnel est un nombre algébrique.
3. Montrer que si $x$ est un nombre algébrique alors $\sqrt{x}$ est encore un nombre algébrique.

**Partie II. Polynôme minimal associé à un nombre algébrique.** Soit $a$ un nombre algébrique. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de $a$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des degrés des polynômes de $\mathcal{P}$ non nuls. En d'autres termes :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \left\{ P \in \mathbb{Q}[X] \quad / \quad P(a) = 0 \right\} \\ \mathcal{D} &= \left\{ n \in \mathbb{N} \quad / \quad \exists P \in \mathcal{P} \setminus \{0\},\ n = deg(P) \right\} \end{aligned}$$

4. Expliquer pourquoi $\mathcal{D}$ admet un minimum. On pose $n = Min(\mathcal{D})$.
5. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire (cad de coefficient dominant égale à 1) de $\mathcal{P}$ de degré $n$. On le notera $\mu$, c'est le polynôme minimal associé à $a$.
6. On note $(\mu)$ l'ensemble des multiples de $\mu$ dans $\mathbb{Q}[X]$ c'est-à-dire que :

$$(\mu) = \left\{ P \in \mathbb{Q}[X] \,/\, \exists Q \in \mathbb{Q}[X],\ P = \mu.Q \right\}$$

   Montrer que $(\mu)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{Q}[X]$.
7. Montrer que $(\mu) = \mathcal{P}$.

**Partie III. Notion de sous corps de $\mathbb{R}$.** Un sous-ensemble $K$ de $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x, y \in K, \begin{cases} 1 \in K \\ x - y \in K \\ x \times y \in K \\ \frac{1}{x} \in K \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$$

Ainsi $K$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ s'il contient 1 et est stable par + et opposé, $\times$ et inverse. Par exemples $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

8. Montrer que l'ensemble suivant est un sous corps de $\mathbb{R}$ :

$$L = \left\{a + b\sqrt{2} \,/\, a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

9. Montrer que tout sous-corps de $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{Q}$ (On pourra commencer par montrer par récurrence que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$). Ainsi $\mathbb{Q}$ est le plus petit sous corps de $\mathbb{R}$.

On admet que la notion d'espace vectoriel définie en cours sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est la même si on considère les scalaires dans un sous-corps $K$ de $\mathbb{R}$. On parle alors de $K$-espace vectoriel.

**Partie IV. Définition et structure de K(a).** Soit $K$ un sous-corps de $\mathbb{R}$, $a$ un nombre algébrique. Notons $\mu$ le polynôme minimal associé à $a$ et $n$ le degré de $\mu$. De plus posons :

$$K(a) = \left\{P(a) \in \mathbb{R} \,/\, P \in K_{n-1}[X]\right\}$$

où $K_{n-1}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degrés inférieurs à $n$ à coefficients dans $K$.

10. Montrer que $K(a)$ est un sous-espace vectoriel du $K$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
11. Soit $P_1(a)$ et $P_2(a)$ deux éléments de $K(a)$. Montrer qu'il existe un élément $Q(a)$ de $K(a)$ tel que :

$$P_1(a)P_2(a) = Q(a)$$

En déduire que $K(a)$ est stable par $\times$.
12. Montrer que $(1, a, a^2, \ldots, a^{n-1})$ est une base du $K$-espace vectoriel $K(a)$.
13. Soit $b$ un élément de $K(a)$ non nul. Considérons l'application :

$$\begin{array}{cccc} \phi & K(a) & \to & K(a) \\ & x & \mapsto & bx \end{array}$$

Montrer que $\phi$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.
14. En déduire que $b$ est inversible et que $K(a)$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.
15. Montrer que $K(a)$ est le plus petit corps contenant à la fois $K$ et $a$.

**Partie V. Structure de $\mathcal{A}$.**

16. Soient $K_1$, $K_2$ des sous-corps de $\mathbb{R}$ tels que $\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \mathbb{R}$. Considérons de plus

$$\begin{array}{cl} (e_1, \ldots, e_p) & \text{une base du } \mathbb{Q}\text{-espace vectoriel } K_1 \\ (f_1, \ldots, f_q) & \text{une base du } K_1\text{-espace vectoriel } K_2 \end{array}$$

Montrer que la famille $(e_i \times f_j)$ avec $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$ est une base du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $K_2$.
17. Soient $a_1$ et $a_2$ des nombres algébriques. Posons $\mathbb{Q}(a_1, a_2) = (\mathbb{Q}(a_1))\,(a_2)$. Montrer que $\mathbb{Q}(a_1, a_2)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie. On notera $d$ sa dimension.
18. Montrer que les familles $(1, (a_1 + a_2), (a_1 + a_2)^2, \ldots, (a_1 + a_2)^d)$ et $(1, (a_1a_2), (a_1a_2)^2, \ldots, (a_1a_2)^d)$ sont $\mathbb{Q}$-liées (c'est-à-dire que les coefficients sont dans $\mathbb{Q}$). En déduire que $a_1 + a_2$ et $a_1a_2$ sont algébriques.
19. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.