Intégrales à paramètres / Séries entières

Problème 1

Partie I – Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Q1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction sinus est continue sur $[0, t]$, de classe C^1 sur $]0, t[$, et sa dérivée (le cosinus) est majorée en valeur absolue par 1. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|\sin(t) - \sin(0)| \leqslant 1 \cdot |t - 0|,$$

c'est-à-dire : $|\sin(t)| \leqslant t$. D'où le résultat.

Q2. Il s'agit de démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, les intégrales $F(x)$, $G(x)$ et $H(x)$ convergent.

Soit $x \in]0, +\infty[$. Leurs intégrandes sont continus sur $]0, +\infty[$ (et même sur $[0, +\infty[$ pour $G(x)$ et $H(x)$), et dominées par la fonction $t \mapsto e^{-tx}$; pour justifier cette domination, il suffit d'utiliser l'inégalité $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \leqslant 1$ valable pour tout $t > 0$ d'après la question précédente, ou les inégalités triviales $|\sin| \leqslant 1$ et $|\cos| \leqslant 1$ pour les deux dernières intégrales.

Or c'est un résultat connu que la fonction $t \mapsto e^{-tx}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si $x > 0$. Donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, les intégrales $F(x)$, $G(x)$ et $H(x)$ convergent absolument, donc convergent.

Ainsi F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

Q3. Toujours en utilisant l'inégalité $\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \leqslant 1$ valable pour tout $t > 0$, et l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leqslant |F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| e^{-tx} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-tx} \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-tx}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x},$$

et de là il vient facilement $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ grâce au théorème des gendarmes.

Q4. Nous allons utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégrale. Posons :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, +\infty[, \quad f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

Alors :

— pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après la question **Q2** ;

— pour tout $t \in]0, +\infty[$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, +\infty[$ on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin(t) \;;$$

— pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin(t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$;

— pour tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, tout $x \in [a, b]$ et tout $t \in]0, +\infty[$, on a :

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = |\sin(t)|e^{-xt} \leqslant e^{-at} \quad (\text{HYPOTHÈSE DE DOMINATION}),$$

et l'application $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car $a > 0$.

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, vérifié sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, l'application $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. On a en outre :

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt}\mathrm{d}t = -G(x).$$

Q5. Soit $x > 0$. On a :

$$H(x) + iG(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}(\cos(t) + i\sin(t))\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(i-x)t}}{i-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-i},$$

et nous mettons cette expression sous forme algébrique afin d'en déduire, par identification des parties réelle et imaginaire, une expression simple de $G(x)$ et $H(x)$. On a, après multiplication au numérateur et au dénominateur par $x + i$:

$$H(x) + iG(x) = \frac{1}{x-i} = \frac{x+i}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} + i\frac{1}{x^2+1}.$$

On en déduit, par la stratégie annoncée ci-dessus :

$$H(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad G(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Pour en déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t$, notons qu'en posant $u = \alpha t$ nous devrions pouvoir nous ramener à la fonction H (et en même temps démontrer la convergence de cette intégrale). Le changement de variable $t \mapsto \alpha t$ est licite car c'est une application de classe C^1 et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On a par ailleurs $\mathrm{d}u = \alpha\mathrm{d}t$, et sous réserve d'existence de cette intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{\alpha}u}\cos(u)\frac{\mathrm{d}u}{\alpha} = \frac{H\left(\frac{x}{\alpha}\right)}{\alpha}.$$

Or un changement de variable conserve la nature des intégrales, et on sait que $H\left(\frac{x}{\alpha}\right)$ converge. On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t$ converge, et l'égalité ci-dessus est licite. On a donc :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\frac{\frac{x}{\alpha}}{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+1} = \frac{x}{x^2+\alpha^2}.$$

Q6. On a :

$$\forall x > 0, \quad F'(x) \overset{[\mathbf{Q4}]}{=} -G(x) \overset{[\mathbf{Q5}]}{=} -\frac{1}{x^2+1}.$$

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est l'arc tangente. On en déduit l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = -\arctan(x) + c.$$

Or, d'après la question **Q3** : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. Prendre la limite quand $x \to +\infty$ dans l'égalité ci-dessus donne donc :

$$0 = -\frac{\pi}{2} + c,$$

c'est-à-dire : $c = \frac{\pi}{2}$. En conclusion :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x).$$

Et en outre $F(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, ce qu'on peut réécrire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

Partie II – Autour de la formule de Viète

Q7. Nous allons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la proposition P_n :

« Pour tout $t > 0$ tel que $t \not\equiv 0 \bmod 2^{n-1}\pi$, on a : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)}$. »

Montrons P_1. Soit $t > 0$ tel que $t \not\equiv 0 \bmod \pi$. On a :

$$\frac{\sin(t)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right),$$

d'où la propriété au rang 1.

À présent, soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. Soit $t > 0$ tel que $t \not\equiv 0 \bmod 2^n\pi$. Alors :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right).$$

A priori P_n nécessite que $t \not\equiv 0 \bmod 2^{n-1}\pi$. Mais l'identité invoquée se prolonge au cas $t \equiv 0 \bmod 2^{n-1}\pi$ (tant que $t \not\equiv 0 \bmod 2^n\pi$) par passage à la limite et par continuité (qui est assurée par le fait que $2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \neq 0$ en ces réels t).

La formule de duplication $\sin(a) = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)$ utilisée avec $a = \frac{t}{2^n}$ implique alors :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^{n+1}\cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)} \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) = \frac{\sin(t)}{2^{n+1}\sin\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)}$$

d'où P_{n+1} : ainsi la proposition est héréditaire.

Ayant démontré que la proposition est initialisée et héréditaire, on en déduit qu'on a P_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in \mathbb{R}_+^* \setminus (2^{n-1}\pi\mathbb{Z}), \quad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. L'énoncé a oublié de tenir compte de l'annulation possible de $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)$ au dénominateur ; si je choisis de prendre $t \not\equiv 0 \bmod 2^{n-1}\pi$ dans la définition de P_n, au lieu de $t \not\equiv 0 \bmod 2^n\pi$ (qui suffirait à permettre la division par $\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)$), c'est pour m'éviter une distinction de cas fastidieuse dans l'hérédité, sachant que cela n'empêche pas de traiter les questions suivantes, la question **Q9** plus particulièrement.

Q8. Soit $t > 0$. Nous allons montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la proposition P_n :

$$\text{« } \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right). \text{ »}$$

Montrons P_1. On a :

$$\frac{1}{2^{1-1}} \sum_{k=1}^{2^{1-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^1} t\right) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) = \prod_{k=1}^{1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right),$$

d'où la propriété au rang 1.

À présent, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel qu'on ait P_n. Montrons P_{n+1}. On a :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) \times \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right) \overset{[\mathrm{P}_n]}{=} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) \cos\left(\frac{t}{2^{n+1}}\right)$$

et d'après la formule de trigonométrie rappelée :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

utilisée avec $a = \frac{2k-1}{2^n} t$ et $b = \frac{t}{2^{n+1}}$, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) &= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2(2k-1)+1}{2^{n+1}} t\right) + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2(2k-1)-1}{2^{n+1}} t\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{4k-1}{2^{n+1}} t\right) + \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{4k-3}{2^{n+1}} t\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \equiv -1 \bmod 4}}^{4\cdot 2^{n-1}} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}} t\right) + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \equiv -3 \bmod 4}}^{4\cdot 2^{n-1}} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}} t\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \equiv \pm 1 \bmod 4}}^{2^{n+1}} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}} t\right),
\end{aligned}$$

où pour la dernière égalité on écrit que $-3 \equiv 1 \bmod 4$. Or l'ensemble des entiers congrus à ± 1 modulo 4 est exactement l'ensemble des entiers impairs. C'est-à-dire :

$$\sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \equiv \pm 1 \bmod 4}}^{2^{n+1}} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}} t\right) = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2^{n+1}} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}} t\right),$$

et un entier impair $\ell \in [\![1, 2^{n+1}]\!]$ s'écrit $\ell = 2k-1$ avec $k \in \mathbb{N}$ (plus précisément : $1 \leqslant \ell \leqslant 2^{n+1} \iff 1 \leqslant k \leqslant \frac{2^{n+1}+1}{2}$ donc $k \in [\![1, 2^n]\!]$). En conclusion :

$$\prod_{k=1}^{n+1} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \text{ impair}}}^{2^{n+1}} \cos\left(\frac{\ell}{2^{n+1}} t\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \cos\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}} t\right),$$

d'où P_{n+1} : ainsi la proposition est héréditaire.

Ayant démontré que la proposition est initialisée et héréditaire, on en déduit qu'on a P_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Q9. Soit $t > 0$, et soit n au voisinage de l'infini. En particulier, pour tout n suffisamment grand, on a $t \in]0, 2^{n-1}\pi[$ et donc $t \not\equiv 0 \bmod 2^{n-1}\pi$. En regroupant les résultats des deux questions précédentes, il vient :

$$\frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

Or le membre de gauche a une limite finie quand $n \to +\infty$. En effet, en utilisant l'équivalent asymptotique classique $\sin(u) \underset{u \to 0}{\sim} u$, avec $u = \frac{t}{2^n}$, on obtient :

$$\frac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\frac{t}{2^n}\right)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{2^n \times \frac{t}{2^n}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sin(t)}{t} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\sin(t)}{t}.$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right)$ existe, et qu'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) = \frac{\sin(t)}{t}.$$

Q10. Soit $x > 0$. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ \forall t \in]0, +\infty[,\ f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx}.$$

Avec ces notations, on aimerait démontrer :

$$F(x) = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t,$$

puisqu'en effet, par linéarité de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \int_0^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right) e^{-tx} \mathrm{d}t.$$

Or, d'après la question **Q9**, on a :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to +\infty} f_n(t) \mathrm{d}t.$$

Autrement dit, l'égalité à démontrer revient à faire une interversion limite-intégrale : nous allons pour cela utiliser le théorème de convergence dominée. Vérifions ses hypothèses :

— pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, l'application f_n est continue (par morceaux) sur $]0, +\infty[$, en tant que combinaison linéaire de produits de cosinus et exponentielles ;

— d'après la question **Q9**, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers l'application $f : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}e^{-tx}$, qui est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$ en tant que produit et quotient de fonctions usuellement continues ;

— pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ et tout $t \in]0,+\infty[$, on a :

$$|f_n(t)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\left|\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)\right|e^{-tx} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}e^{-tx} = e^{-tx}$$ (HYPOTHÈSE DE DOMINATION)

et on sait que l'application $\varphi : t \mapsto e^{-tx}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Toutes les hypothèses du théorème de convergence dominée étant vérifiées, on en déduit d'une part que f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, et d'autre part que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire, d'après la discussion qui précède :

$$F(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\int_0^{+\infty}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)e^{-tx}\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat.

Q11. Nous avons établi dans la question **Q6** que $F(1) = \frac{\pi}{4}$. Donc, d'après la question précédente :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\int_0^{+\infty}\cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right)e^{-t}\mathrm{d}t,$$

Or on sait calculer les intégrales du membre de droite grâce à la question **Q5**, et on en déduit (en prenant $\alpha = \frac{2k-1}{2^n}$ et $x = 1$) :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)^2+1} = \lim_{n\to+\infty}2^{n+1}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{1}{(2k-1)^2+2^{2n}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Problème 2

Les réferences aux questions sont décalées de 18. Ainsi les questions 1, 2, 3,... de l'énoncé sont ici les questions 19, 20, 21,...

Q 19. Si l'on considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres (réels ou) complexes, alors le rayon de convergence de cette série entière est

$$\begin{aligned} R &= \sup\Big(\Big\{r \in \mathbb{R}_+ \ ; \text{ la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\Big\}\Big) \\ &= \sup\Big(\Big\{r \in \mathbb{R}_+ \ ; \ \exists M > 0 \ : \forall n \in \mathbb{N}, \ |a_n r^n| \leq M\Big\}\Big) \end{aligned}$$

[Une **propriété** est qu'alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < R$ alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge (absolument) et que si $|z| > R$ alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge (grossièrement)]

Q 20. La fonction somme J_0 sera de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et on a $\forall x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \\ J_0'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^{n-1}, \\ J_0''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

En multipliant $J_0'(x)$ par x et $J_0''(x)$ par x^2 on obtient les expressions suivantes (qui apparaissent dans l'équation (4)) : $\forall x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} xJ_0'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^n, \\ x^2 J_0''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^n. \end{aligned}$$

Noter que le terme $nc_n x^n$ est nul pour $n = 0$, et que les termes $n(n-1)c_n x^n$ sont nuls pour $n = 0$ et $n = 1$.
On pourrait donc faire démarrer la 1ère somme à $n = 0$ et la 2nde à $n = 0$ ou $n = 1$... c'est ce que l'on fait fréquemment...
Mais ici, le terme en $J_0(x)$ commence par $c_0 x^0 = 1$, donc la quantité $x^2 J_0(x)$ ne fait apparaître que des puissances supérieures (ou égales) à 2.
On va donc "au contraire" faire démarrer toutes les sommes à la puissance 2, en écrivant si nécessaire les termes en plus en dehors.
On écrit donc (avec un décalage d'indice $n = k + 2$ pour la 1ère série) $\forall x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} x^2 J_0(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^{k+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} c_{n-2} x^n, \\ xJ_0'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n x^n = c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} n c_n x^n, \\ x^2 J_0''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^n. \end{aligned}$$

Le fait que J_0 est solution de (4) sur $]-R, R[$ signifie alors que $\forall x \in]-R, R[$,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) c_n x^n + c_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} n c_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} c_{n-2} x^n = 0,$$

ou encore en regroupant les 3 séries en une seule que $\forall x \in]-R, R[$,

$$c_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \big(n(n-1)c_n + nc_n + c_{n-2}\big) x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'une série entière (l'égalité ayant lieu sur $]-R, R[$ pour $R > 0$) on en déduit :

- Identification du coefficient de $x^1 = x$: $c_1 = 0$,
- Identification du coefficient de x^n (pour $n \geq 2$) : $\forall n \geq 2,\ n(n-1)c_n + nc_n + c_{n-2} = 0$.
  Le coeff de c_n est $n(n-1) + n = n^2 \neq 0$ pour $n \geq 2$ donc cette relation peut s'écrire

$$\forall n \geq 2, \quad c_n = \frac{-c_{n-2}}{n^2} \quad (*)$$

En partant de $c_1 = 0$, la relation de récurrence $(*)$ donne (avec $n = 3$) $c_3 = 0$, puis (avec $n = 5$) $c_5 = 0$.
Il faudrait rédiger la récurrence (je ne le fais pas) on trouve aisément $\forall k \in \mathbb{N},\ c_{2k+1} = 0$.
Quant à la valeur de c_{2k}, on ne nous demande pas de la trouver. Comme on nous la donne, on la vérifie par récurrence. Je note donc (pour $k \in \mathbb{N}$) H_k la propriété $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}$. Démontrons donc cette propriété par récuerrence.
__Initialisation :__ Pour $k = 0$, on a $\dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2} = \dfrac{1}{1.1^2} = 1$ et $c_0 = 1$ par hypothèse de l'énoncé, donc la propriété H_0 est vraie.
__Hérédité :__ Supposons la propriété vraie pour un certain entier $k \in \mathbb{N}$.
On utilise alors la relation $(*)$ avec $n = 2k + 2 = 2(k+1) \geq 2$, ce qui donne

$$c_{2(k+1)} = \frac{-c_{2k}}{(2(k+1))^2} = \frac{(-1).(-1)^k}{4(k+1)^2.4^k(k!)^2}.$$

Puisque $4.4^k = 4^{k+1}$ et $(k+1)^2(k!)^2 = ((k+1)k!)^2 = (k+1)^2$ on obtient

$$c_{2(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{4^{k+1}.((k+1)!)^2},$$

et la propriété est prouvée au rang $k + 1$.
Ainsi, le résultat est bien démontré par récurrence.

Q 21. Les coefficients d'indices impairs étant nuls, on a $J_0(x) = \sum_{k \geq 0} c_{2k}x^{2k} = \sum_{k \geq 0} \dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Je note $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \dfrac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k} \neq 0$, et on a $\forall k$,

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{|x|^{2k+2}}{|x|^{2k}} \cdot \left|\frac{c_{2k+2}}{c_{2k}}\right| = |x^2| \cdot \frac{1}{(2k+2)^2} \xrightarrow{k \to \infty} 0 < 1,$$

donc (règle de d'Alembert) la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge absolument pour tout réel x (la CV est évidente en $x = 0$).
Le rayon de CV de la série entière est donc $R = +\infty$.

Q 22. La fonction J_0 est donc continue sur $\mathbb{R}$. Si (J_0, f) est liée dans l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $f = \lambda J_0$ sur $]0, r[$ ($J_0(0) = c_0 = 1$ donc par continuité, J_0 ne peut être nulle sur $]0, r[$).
La fonction J_0 étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est bornée sur le segment $[0, r]$, donc sur $]0, r[$. Il en est donc de même de f.

Q 23. Si $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est solution, alors par produit de Cauchy, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ tq $|x| < R_0 = min(R_\alpha, R_\beta)$:

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k x^k$$

où (résultat sur les produits de Cauchy)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$$

La fonction série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k x^k$ est constante égale à 1 sur $]-R, R[$ ssi $\gamma_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_n = 0$.
Puisque $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0 = \beta_0$ (hyp $\alpha_0 = 1$) on retrouve exactement les relations (5).

Q 24. Il suffit de se rappeler Q19 ! Si $r < R_\alpha$, la suite $(\alpha_n r^n)$ est bornée
(OU : si $r < R_\alpha$, la série $\sum \alpha_n r^n$ CV absolument, donc CV ; alors, son terme général $(\alpha_n r^n)$ tend vers 0, donc est borné).
On a bien l'existence de $M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\alpha_n r^n| \leq M$, d'où le résultat en divisant par $r^n > 0$.

Q 25. On a en fait un système "triangulaire" (certes infini), mais : la 1ère égalité donne β_0, puis l'égalité suivante donne pour $n = 1$: $\alpha_0\beta_1$ en fonction de β_0, on en déduit β_1 car $\alpha_0 \neq 0$, puis l'égalité donne pour $n = 2$: $\alpha_0\beta_1$ en fonction de β_0 et β_1, on en déduit β_2 car $\alpha_0 \neq 0$, et ainsi de suite.

Pour rédiger, on va montrer par récurrence FORTE que (pour tout n) β_n est défini de manière unique, et vérifie l'inégalité (sauf pour $n = 0$)...

- Pour $n = 0$, la 1ère égalité de (5) impose une unique solution, qui est $\beta_0 = 1$.
- Pour $n = 1$, la 2ère égalité de (5) implique (puisque $\alpha_0 = 1$) $\beta_1 = -\alpha_1\beta_0 = -\alpha_1$ (d'où l'existence et l'unicité), puis d'après Q24 $|\beta_1| = |\alpha_1| \leq \frac{M}{r} = \frac{M(M+1)^{1-1}}{r^1}$, donc l'inégalité est respectée.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose β_0, ..., β_n définis de manière unique et β_1, ..., β_n vérifiant l'inégalité...
  Alors la 2nde inégalité de (5) pour la valeur de $n+1$ implique (puisque $\alpha_0 = 1$) :

$$\beta_{n+1} = -\alpha_1\beta_n - \alpha_2\beta_{n-1} ... - \alpha_n\beta_1 - \alpha_{n+1}\beta_0$$

  On a déjà existence et unicité de β_{n+1}. On peut ensuite le majorer par inégalité triangulaire, puis en utilisant Q24 pour majorer les $\alpha_{...}$ et l'hypothèse de récurrence pour majorer les $\beta_{...}$, en traitant à part le cas de $\beta_0 = 1$.
  On a ainsi

$$\begin{aligned}
|\beta_{n+1}| &\leq |\alpha_1|.|\beta_n| + |\alpha_2|.|\beta_{n-1}| + ... + |\alpha_n|.|\beta_1| + |\alpha_{n+1}|.1 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{r^k}.\frac{M(M+1)^{(n+1)-k-1}}{r^{n+1-k}} + \frac{M}{r^{n+1}} \\
&\leq \frac{M}{r^{n+1}}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} M(M+1)^{n-k}\right) \qquad (*)
\end{aligned}$$

  On a une somme de termes d'une suite géométrique de raison $M + 1 \neq 1$, donc on peut la calculer (en posant $i = n - k$) :

$$\sum_{k=1}^{n} M(M+1)^{n-k} = M\sum_{j=0}^{n-1}(M+1)^j = M\frac{(M+1)^n - 1}{M+1-1} = (M+1)^n - 1$$

  En "réinjectant" dans $(*)$ il vient

$$|\beta_{n+1}| \leq \frac{M}{r^{n+1}}(1 + (M+1)^n - 1) = \frac{M(M+1)^{n+1-1}}{r^{n+1}},$$

  donc la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

L'existence et l'unicité de la suite vérifiant (5) est ainsi démontrée, ainsi que les inégalités demandées.

Q 26. Si on note $\rho = \dfrac{r}{M+1} > 0$, on a d'après Q25

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |\beta_k\rho^k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k} \cdot \frac{r^k}{(M+1)^k} = \frac{M}{M+1} = c^{ste},$$

donc la suite $(\beta_k\rho^k)$ est bornée.
On en déduit (cf Q19) que le rayon de CV de $\sum_{k\geq 0} \beta_k x^k$ vérifie $R_\beta \geq \rho > 0$.

Q 27. Si λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$ il en sera de même de y, et l'on aura $\forall x \in]0, r[$,

$$y'(x) = \lambda'(x)J_0(x) + \lambda(x)J_0'(x) \quad \text{et} \quad y''(x) = \lambda''(x)J_0(x) + 2\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda(x)J_0''(x).$$

Ainsi, y sol de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si $\forall x \in]0, r[$,

$$x^2(\lambda''(x) + 2\lambda'(x)J_0'(x) + \lambda(x)J_0''(x)) + x(\lambda'(x)J_0(x) + \lambda(x)J_0'(x)) + x^2\lambda(x)J_0(x) = 0,$$

et l'on peut regrouper les termes en mettant λ, λ' et λ'' en facteur, i.e. y sol de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si $\forall x \in]0, r[$,

$$x^2\lambda''(x)J_0(x) + \lambda'(x)[2x^2J_0'(x) + xJ_0(x)] + \lambda(x)[x^2J_0''(x)) + xJ_0'(x) + x^2J_0(x)] = 0.$$

Le terme $x^2J_0''(x)) + xJ_0'(x) + x^2J_0(x)$ est nul (puisque J_0 est solution de (4), donc y sol de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si $\forall x \in]0, r[$,

$$x^2\lambda''(x)J_0(x) + \lambda'(x)[2x^2J_0'(x) + xJ_0(x)] = 0 \qquad (*)$$

Par ailleurs, si on note $\psi : x \mapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$, alors la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, r[$, et alors ψ est constante sur $]0, r[$ si et seulement si $\forall x \in]0, r[$, $\psi'(x) = 0$, i.e. ssi $\forall x \in]0, r[$,

$$J_0^2(x)\lambda'(x) + 2xJ_0'(x)J_0(x)\lambda'(x) + xJ_0^2(x)\lambda''(x) = 0 \qquad (**)$$

Les équations $(*)$ et $(**)$ sont proportionnelles (rapport $J_0(x)/x$) donc équivalentes entre elles, et on a le résultat voulu.

Q 28. La fonction J_0 est une série entière de rayon de CV infini, donc par produit de Cauchy de J_0 par elle-même, la fonction J_0^2 est somme d'une série entière, de rayon de CV infini.
On a $J_0(0) = c_0 = 1$, donc $J_0(0)^2 = 1$.

Q 29. D'après Q27, si l'on prend pour λ une primitive de $x \mapsto \frac{1}{xJ_0^2(x)}$, alors $y : x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ sera solution de (4).

En notant $J_0^2(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k$, de rayon de CV infini, alors par Q23 à Q26, on peut définir $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k$, de rayon de CV $R_\beta > 0$, tq $J_0^2 g = 1$ sur $] - R_\beta, R_\beta[$. En d'autres termes, $1/J_0^2$ est DSE au voisinage de 0.

Le coefficient β_0 vaut 1, et pour faire apparaître le ln on commence en écrivant $\dfrac{1}{J_0^2(x)} = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^k$ pour tout x dans $] - R_\beta, R_\beta[$, donc *a fortiori* sur $]0, R_\beta[$.

On a alors $\forall x \in]0, R_\beta[$, $\dfrac{1}{xJ_0^2(x)} = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{k-1}$. En primitivant, on choisit $\lambda(x) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k} x^k$ pour tout $x \in]0, R_\beta$.
La fonction $x \mapsto \lambda(x)J_0(x)$ est alors (d'après Q27) une solution de (4).
Cette solution peut s'écrire $\ln(x)J_0(x) + \eta(x)$, où $\eta(x)$ est le produit de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\beta_k}{k} x^k$ et de $J_0(x)$.
En tant que produit (par produit de Cauchy) d'une série entière de rayon de CV R_β et d'une série entière de rayon de CV infini, η possède un rayon de CV $R_\eta \geq R_\beta$.
Et la solution a la forme demandée.

Q 30. Notons $J_1 : x \mapsto \eta(x) + \ln(x)J_0(x)$ la solution de (4) trouvée Q29.
En tant que série entière, $\eta(x) \to \eta(0)$ quand $x \to 0$, donc η est bornée au voisinage de 0. En revanche, $J_0(x) \to J_0(0) = 1$ donc $J_0(x)\ln(x) \to -\infty$, lorsque $x \to 0^+$.
Ainsi, J_1 N'est PAS bornée sur $]0, r[$.
Par Q22, on en déduit que (J_0, J_1) est une famille libre.

CONCLUSION : (J_0, J_1) est une famille libre (de 2 élts !) de l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$, et cet ensemble est un e.v. de dimension 2.
Ainsi, (J_0, J_1) est une base de l'ensemble des solutions.

L'ensemble recherché s'écrit donc $Vect(J_0, J_1)$, ou si l'on préfère, la solution générale est $x \mapsto AJ_0(x) + BJ_1(x)$, pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.