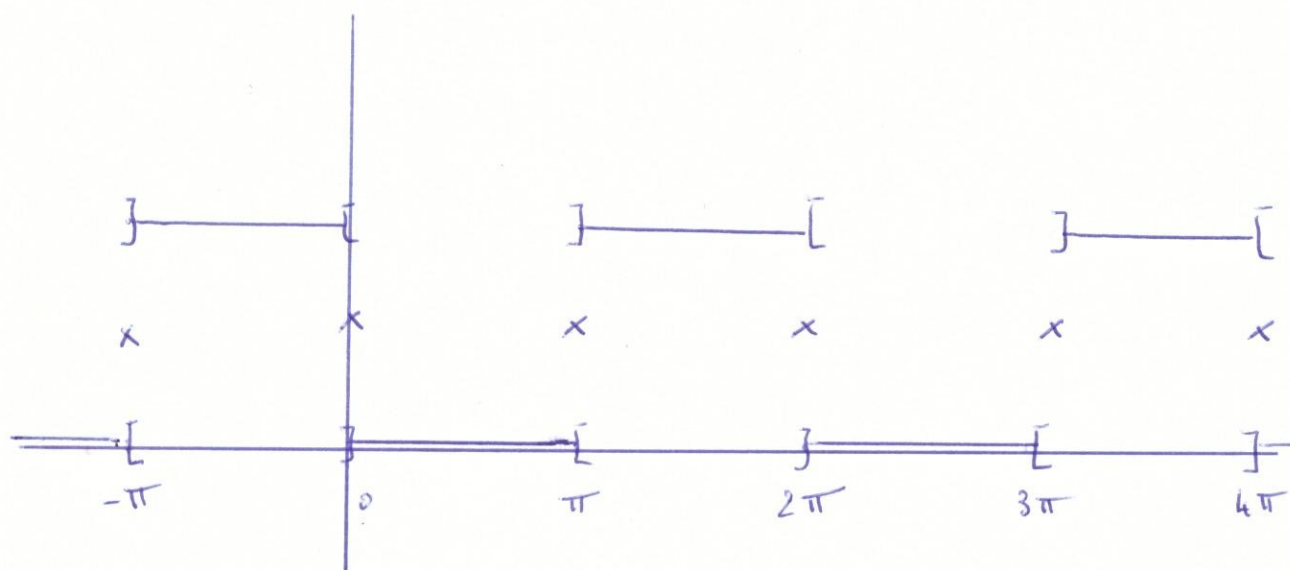


Correction DS-7

1



- 2) Soit $(a_0, \dots, a_p)$ une subdivision adaptée à f
 $(b_0, \dots, b_q)$ " " " à g .

On réordonne l'ensemble $\{a_0, \dots, a_p\} \cup \{b_0, \dots, b_q\}$.
 On obtient un n -uplet :

$$\sigma = (c_0, \dots, c_n)$$

On a $n \leq p+q$ car il a fallu enlever les éléments communs aux deux ensembles. La subdivision σ est alors adaptée à f et à g .

- 3) M_g D est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à l'aide du théorème de caractérisation

- $D \neq \emptyset$ car $0 \in D$
- $D \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par définition de D .

• Soit f, g dans D et λ, μ dans $\mathbb{R}$. $\forall \lambda f + \mu g \in D$
 Considérons $(a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f et g . Soit i dans $\{0, \dots, n-1\}$.

→ $(\lambda f + \mu g)$ est 2π -périodique

→ $(\lambda f + \mu g)$ est C^1 (par CL de fcts C^1) sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$.

→ $(\lambda f + \mu g)(a_i^+) = \lambda f(a_i^+) + \mu g(a_i^+)$ existent

De même avec $(\lambda f + \mu g)(a_{i+1}^-)$ $(\lambda f + \mu g)'(a_i^+)$
 et $(\lambda f + \mu g)'(a_{i+1}^-)$

$$\begin{aligned} &\rightarrow (\lambda f + \mu g)(x^+) + (\lambda f + \mu g)(x^-) \\ &= \lambda (f(x^+) + f(x^-)) + \mu (g(x^+) + g(x^-)) = 2(\lambda f + \mu g)(x) \end{aligned}$$

[4] Soit f, g dans D et $(a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f et g . On a alors pour tout i de $\{0, \dots, n-1\}$:

→ $f \times g$ 2π -per comme produit de fct périod.

→ $f \times g$ est C^1 sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow a_i^+} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a_i^+} g(x) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow a_{i+1}^-} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a_{i+1}^-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a_{i+1}^-} g(x) \in \mathbb{R}.$$

→ idem avec les dérivées et la 3^{ème} cond de Dirich

Donc $f \cdot g$ vérifie les conditions de Dirichlet 3
 ainsi $f \cdot g \in \mathcal{D}$.

5 Soit $(a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $[0, 2\pi]$ adaptée à h

$$\int_0^{2\pi} h = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} h$$

or $\lim_{t \rightarrow a_i} h(t)$ et $\lim_{t \rightarrow a_{i+1}} h(t)$ existent. L'intégrale $\int_{a_i}^{a_{i+1}} h$ est donc faussement impropre en a_i et a_{i+1} , elle est donc convergente. Il en est donc de même pour $\int_a^b h$.

6 Effectuons une IPPG en posant pour $p \geq 1$:

$$u(t) = \phi(t)$$

$$v'(t) = \frac{\cos(pt)}{p}$$

$$u'(t) = \phi'(t)$$

$$v'(t) = \sin(pt)$$

Les fcts sont $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$ et le crochet $\text{cvg} =$

$$\begin{aligned} [u(t)v(t)]_a^b &= \frac{1}{p} [\cos(pt) \phi(t)]_a^b \\ &= \frac{1}{p} [\cos(pb) \phi(b^+) - \cos(pa) \phi(a^+)] \stackrel{\text{def}}{=} K_p \end{aligned}$$

On peut donc effectuer une IPPG.

$$\int_a^b \phi(t) \sin(pt) dt = K_p - \frac{1}{p} \int_a^b \phi'(t) \cos(pt) dt. \quad (*)$$

De plus

$$\bullet |K_p| \leq \frac{1}{p} (|\phi(b^-)| + |\phi(a^+)|) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \quad (1)$$

$$\bullet \left| \frac{1}{p} \int_a^b \phi'(t) \omega(pt) dt \right| \leq \frac{1}{p} \|\phi'\|_{\infty} (b-a) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \quad (2)$$

$\|\phi'\|_{\infty}$ existe car ϕ' peut être prolongé par continuité sur le segment $[a, b]$, elle est donc bornée.

Ainsi grâce aux équations (1) et (2), l'équation (1) devient :

$$\int_a^b \phi(t) \sin(pt) dt \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

[7] Soit i dans $\{0, \dots, n-1\}$.

Comme $]a_i; a_{i+1}[\subset]a, b[$ et $h^2 \geq 0$

$$\int_0^{2\pi} h^2 = 0 \Rightarrow \int_{a_i}^{a_{i+1}} h^2 = 0$$

$$\text{or } \begin{cases} h^2 \geq 0 \\ h^2 \text{ continue sur }]a_i; a_{i+1}[. \end{cases}$$

Donc $h^2 = 0$ sur $]a_i; a_{i+1}[$.

et $h = 0$ sur $]a_i; a_{i+1}[$

[8] $(\dots / \dots)$ est clairement une forme bilinéaire symétrique positive. Seul le caractère défini-positif demande une précision.

D'après la question précédente :

$$\int_0^{2\pi} h^2 = 0 \Rightarrow \forall x \in [a, b] \setminus \{a_0, \dots, a_n\} \quad h(x) = 0.$$

Montrons que pour tout i de $\{0, \dots, n-1\}$ $h(a_i) = 0$.

Comme $h(a_i^+) = h(a_i^-) = 0$, d'après la 3^{ème} condition de Dirichlet $h(a_i) = \frac{h(a_i^+) + h(a_i^-)}{2} = 0$.

Donc $h = 0$ sur $[0, 2\pi]$ et comme h est 2π -périodique $h = 0$.

[9]

$$\bullet \langle \cos px, \cos qx \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos px \cos qx \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(p+q)x + \cos(p-q)x}{2} \, dx$$

si $p \neq q$ alors $p+q \neq 0$ (comme $p, q \in \mathbb{N}$ $p+q=0 \Rightarrow p=q=0$)
 $p-q \neq 0$

$$\langle \cos px, \cos qx \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

• Plus rapidement, si $p \neq q$

$$\langle \sin px, \sin qx \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(qx) \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-\cos(p+q)x + \cos(p-q)x}{2} \, dx = 0$$

• Enfin

$$\langle \cos px, \sin qx \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(px) \sin(qx) \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{+\sin(p+q)x + \sin(p-q)x}{2} \, dx = 0$$

[6]

[10] D'après la question précédente :

[7]

$$\begin{aligned}\|\cos px\|^2 &= \langle \cos px, \cos px \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2px + 1}{2} dx \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2px + 1}{2} dx = \frac{1}{2} & \text{si } p \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1+1}{2} dx = 1 & \text{si } p = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$\|\sin px\|^2 = \langle \sin px, \sin px \rangle \quad \text{ici } p \geq 1$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{\cos 2px + 1}{2} dx = \frac{1}{2}.$$

[11] F_n est de DF , donc $D = F_n^\perp \oplus F_n^\perp$ et la projection ortho sur F_n existe.

[12] On utilise l'expression du projeté orthog dans une BON

$$\begin{aligned}P(f)(x) &= \left\langle f(x), \frac{\cos(0x)}{\|\cos(0x)\|} \right\rangle \frac{\cos(0x)}{\|\cos(0x)\|} + \sum_{k=1}^n \left\langle f(x), \frac{\cos kx}{\|\cos kx\|} \right\rangle \frac{\cos kx}{\|\cos kx\|} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left\langle f(x), \frac{\sin kx}{\|\sin kx\|} \right\rangle \frac{\sin kx}{\|\sin kx\|}.\end{aligned}$$

Posons $a_0 = \left\langle f(x), \frac{\cos(0x)}{\|\cos 0x\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\cos 0x\|}$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

$$a_k = \left\langle f(x), \frac{\cos kx}{\|\cos kx\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\cos kx\|}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{\frac{1}{2}} \times \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

$$b_k = \left\langle f(x), \frac{\sin kx}{\|\sin kx\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\sin kx\|}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

D'où le résultat.

[13] Application directe du 8

[14] Posons $S_n(u) = \frac{1}{2} + \cos u + \dots + \cos(nu)$

Par parité de $\cos$, on a.

$$2S_n(u) = S_n(u) + S_n(-u) = \sum_{k=-n}^n \cos(ku)$$

$$= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=-n}^n (e^{iu})^k \right)$$

$$= \operatorname{Re} \left(e^{-inu} \times \frac{1 - (e^{iu})^{2n+1}}{1 - e^{iu}} \right)$$

En factorisant par la demi-somme.

$$\begin{aligned}
 2S_n(u) &= \operatorname{Re} \left(\underbrace{\frac{e^{-inu} e^{i \frac{2n+1}{2} u}}{e^{iu/2}}}_{=1} \times \frac{-2i \sin \frac{(2n+1)u}{2}}{-2i \sin(u/2)} \right) \\
 &= \frac{\sin \frac{(2n+1)u}{2}}{\sin(u/2)}
 \end{aligned}$$

[15] D'après la question précédente :

$$\int_0^\pi (1 + \cos(u) + \dots + \cos(nu)) du = \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{2 \sin \frac{u}{2}} du$$

en posant $v = \frac{u}{2}$ dans l'intégrale de droite :

$$\left[u + \sin(u) + \dots + \frac{\sin nu}{n} \right]_0^\pi = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)v}{\sin v} dv$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} du = \pi$$

L'intégrale est donc bien cvg et la limite vaut π

16

10

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(t) + \sum_{k=1}^n f(t) (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^n f(t) \cos(k(t-x)) dt.$$

$$\stackrel{16}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}(t-x)\right)}{2 \sin\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt$$

on pose $T = \frac{t-x}{2}$

$$dT = \frac{dt}{2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi - \frac{x}{2}} f(2T+x) \frac{\sin(2n+1)T}{\sin T} dT.$$

17

11

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (f(x+2u) + f(x-2u)) \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u} du.$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x+2u) \frac{\sin((2n+1)u)}{u} du + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x-2u) \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u} du.$$

on pose $v = -u$ dans l'intégrale de droite.

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x+2u) \frac{\sin((2n+1)u)}{u} du - \frac{1}{\pi} \int_0^{-\pi/2} f(x+2u) \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u} du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2u) \frac{\sin((2n+1)u)}{u} du.$$

la fct $u \rightarrow f(x+2u) \frac{\sin((2n+1)u)}{u}$ est π per.

on peut donc intégrer sur le segment de longueur π de notre choix :

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2u) \frac{\sin((2n+1)u)}{u} du$$

$$S_n(f)(x)$$

16

118) g_x est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.

112

Déterminons la limite de g_x en 0.

$$g_x(t) = \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - f(x^+) - f(x^-)}{\sin(t)}$$

$$\text{or } f \in D \text{ donc } f(x^+) + f(x^-) = 2f(x)$$

$$g_x(t) = \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{\sin(t)}$$

$$\underset{0}{\sim} \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{t}$$

$$\underset{0}{\sim} \frac{f(x+2t) - f(x)}{t} + \frac{f(x-2t) - f(x)}{t}$$

$$\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 2f'(x^+) + 2f'(x^-)$$

Ainsi g_x peut être prolongée par continuité en 0.

13

[19] g_2 étant continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ d'après la question 18
On peut utiliser le lemme de Lebesgues (Q6) -

Ainsi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_2(u) \sin((2n+1)u) du \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

[20] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_2(u) \sin((2n+1)u) du$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2t) + f(x-2t)) \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt - \left(\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$$

En utilisant la formule de Dirichlet et la question 15 ($I_n = \pi$), on obtient

$$= \pi \left(S_n(f)(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right)$$

$$= \pi (S_n(f)(x) - f(x))$$

D'après la question précédente, cette intégrale tend vers 0, donc $S_n(f)(x) \longrightarrow f(x)$

[21] En prenant une application f non continue (comme [14])

la fonction de la question 1, par exemple, on a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)}_{f_k(x)} = f(x)$$

Les f_k sont continues

f n'est pas continue

La convergence ne peut être uniforme.

Exercice 2 Notons $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$

(13)

[1] La série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{x+k}$ est une série alternée puisque $\left(\frac{1}{x+n}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0. La série est donc convergente sur $] -1; +\infty[$

[2] Notons R_n le reste de cette série. D'après le th spécial des séries alternées, on a:

$$|R_n(x)| \leq \left| \frac{1}{x+n+1} \right| \leq \frac{1}{n} \quad \text{car } x+1 \geq 0$$

On passe au sup pour x dans I , on trouve

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

La convergence de la série est donc uniforme. Or la CV converge la continuité et les fonctions $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$ sont continues. Il en est donc de même pour S .

[3] Pour req S est dérivable, on va montrer

$$\begin{cases} \sum f_k & \text{CS} \quad (\text{cf } Q_1) \\ \sum f'_k & \text{CV} \end{cases}$$

$$\sum f_n' = \sum \frac{(-1)^{k+1}}{(x+k)^2}$$

Soit R_n le reste de la série $\sum f_n'$

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(x+k)^2} \right| \underset{\text{TSSA}}{\leq} \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

La convergence de la série ^{dérivée} est donc uniforme,

on a donc

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(x+k)^2}$$

[4] $S'(x)$ peut encore s'écrire en groupant les termes par 2 :

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(x+(2k-1))^2} - \frac{1}{(x+2k)^2}}_{\geq 0}$$

$$\oplus \text{ car } x+2k \geq x+2k-1 \geq 0$$

Donc S est croissante.

[5] • Pour déterminer la limite en $+\infty$, utilisons le th de la double limite

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{x+k} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$n \rightarrow +\infty$ $\downarrow$ CUS sur $] -1; +\infty[$
 $S(x)$

$\vdots$

Puisque la convergence est uniforme sur $]-1; +\infty[$
 le diagramme précédent est commutatif d'après (17)
 le th de la double limite. On obtient alors

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

• On utilise encore le th de la double limite
 en -1 sur la série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$

$$\sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{x+k} \xrightarrow{x \rightarrow -1} \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{cv} & & \\ \text{sur }]-1; +\infty[& \downarrow & \\ & & \vdots \end{array}$$

$$S(x) + \frac{1}{x+1} \dashrightarrow$$

La série $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ est cvg car alternée. Donc

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) + \frac{1}{x+1} \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ainsi: } \lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = -\infty.$$

Exercice 1

cf cours