Correction DS 6

Espaces vectoriels normés - Séries

Exercice 1

1. Notons $D = \mathbb{R}\vec{u}$. Une BON de D est $(\vec{u})$ car $\vec{u}$ est normé. Ainsi, pour tout $\vec{a}$ de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$p(\vec{a}) = \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle \vec{u}$$

Notons $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées de $\vec{a}$ dans $\mathcal{B}$. On a donc

$$p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (ax+by+cz)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2x + aby + acz \\ abx + b^2y + bcz \\ acx + bcy + c^2z \end{pmatrix}$$

La matrice de p dans la base canonique est donc :

$$[p]_c = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

2. On remarque que

$$[p]_c + [q]_c = I_n$$

donc

$$p + q = Id.$$

Donc q est la matrice de la projection orthogonale sur $D^\perp = (\mathbb{R}\vec{u})^\perp$.

3 C'est une application numérique avec $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a donc

$$\begin{pmatrix} 13 & -2 & 3 \\ -2 & 10 & -6 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

$\boxed{1}$ $(..|..)$ est clairement une forme bilinéaire symétrique positive. Montrons uniquement qu'elle est définie positive.

Soit f dans E tq

$$\int_0^1 (f^2 + f'^2) = 0$$

On a donc

$$\begin{cases} \int_0^1 (f^2 + f'^2) = 0 \\ f^2 + f'^2 \text{ continue sur } [0,1] \\ f^2 + f'^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi $\underbrace{f^2}_{\oplus} + \underbrace{f'^2}_{\oplus} = 0$ sur $[0,1]$ et donc $f = 0$. (3)

$\boxed{2}$ Résolvons $f'' = f$.

L'équation caractéristique est $r^2 = 1 \iff r = \pm 1$.

Ainsi l'expression générale d'un élément de W est

$$f(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$$

avec A, B dans $\mathbb{R}$

$\boxed{3}$ Mq $V \perp W$.

soit $\begin{cases} f \in V \\ g \in W \end{cases}$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg + f'g' \underset{g \in W}{=} \int_0^1 f g'' + f'g'$$

$$= \left[f g' \right]_0^1 = f(1) g'(1) - f(0) g'(0) \underset{f \in V}{=} 0$$

$\boxed{4}$ Mq $E = V \overset{\perp}{\oplus} W$.

∘ Comme $V \perp W$, il reste à montrer que

$$E \subset V + W$$

Par analyse-synthèse. Supposons que

$$f(x) = \underbrace{f_1(x)}_{\in V} + \underbrace{f_2(x)}_{\in W}$$

$$\underset{Q2}{\iff} f(x) = f_1(x) + Ae^{x} + Be^{-x}.$$

or $f_1(0) = f_1(1) = 0$ donc $\begin{cases} A + B = f(0) \\ Ae + Be^{-1} = f(1) \end{cases}$

donc $\begin{cases} Ae^{-1} - Ae^{+1} = f(0)e^{-1} - f(1) \\ Be - Be^{-1} = f(0)e - f(1) \end{cases}$

$$\iff \begin{aligned} A &= \frac{f(0)e^{-1} - f(1)}{e^{-1} - e} \\ B &= \frac{f(0)e - f(1)}{e - e^{-1}} \end{aligned}$$

synthèse Toute application f de E se décompose de manière unique en :

$$f(x) = f(x) - \left(\frac{f(0)e^{-1} - f(1)}{e^{-1} - e} e^{x} + \frac{f(0)e - f(1)}{e - e^{-1}} e^{-x}\right) \longleftarrow \in V$$

$$+ \left(\frac{f(0)e^{-1} - f(1)}{e^{-1} - e} e^{x} + \frac{f(0)e - f(1)}{e - e^{-1}} e^{-x}\right) \longleftarrow \in W$$

[5] D'après la question précédente,

$$p_W(f)(x) = \frac{f(0)e^{-1} - f(1)}{e^{-1} - e} e^{x} + \frac{f(0)e - f(1)}{e - e^{-1}} e^{-x}$$

[6] Soit f et g dans E_{ab} et λ dans $[0,1]$. Mq $\lambda f + (1-\lambda) g \in E_{ab}$. Tout d'abord $\lambda f + (1-\lambda) g$ C^2 comme CL de fonctions C^2. De plus :

$$(\lambda f + (1-\lambda) g)(0) = \lambda a + (1-\lambda) a = a$$
$$(\lambda f + (1-\lambda) g)(1) = \lambda b + (1-\lambda) b = b.$$

Donc $\lambda f + \mu g \in E_{ab}$ et E_{ab} est convexe.

[7] Notons

$$d = \inf_{f \in E_{ab}} \int_0^1 f^2 + f'^2 = \inf_{f \in E_{ab}} \| f \|^2$$

Posons $g = f - f_{ab}$. On a $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(1) = 0 \end{cases}$. Ainsi

$$d = \inf_{f \in E_{00}} \| g - (-f_{ab}) \|^2$$

Contrairement à E_{ab} quelconque, $V = E_{\infty}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$. On peut donc utiliser le th. de projection :

$$d = \| p(-f_{ab}) - (-f_{ab}) \|^2$$

où p_V est la projection de E sur $E_{\infty} = V$. Donc

$$d = \| p_V(f_{ab}) - f_{ab} \|^2 = \| p_W(f_{ab}) \|^2$$

D'après la question $\boxed{5}$, on a

$$p_W(f_{ab})(x) = \frac{ae^{-1} - b}{e^{-1} - e} e^{x} + \frac{ae - b}{e - e^{-1}} e^{-x}$$

Il reste à calculer l'intégrale ... [...]

Marche aléatoire sur un graphe

Dans tout ce corrigé, je note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé modélisant cette expérience.

I.A – Résultats généraux

Q 1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on appelle $A_i^{(k)}$ l'évènement : « à l'étape k, le point est situé au sommet i », alors la famille $(A_i^{(k)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'évènements (le point est nécessairement en un sommet à chaque étape, et un seul), donc la somme de leurs probabilités égale 1 :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(A_i^{(k)}\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^{(k)}\right) = \mathrm{P}(\Omega) = 1.$$

Or, avec les notations de l'énoncé, la probabilité de $A_i^{(k)}$ est $p_i^{(k)}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, d'où le résultat.

Q 2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Avec les notations de la question précédente, si l'on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(A_i^{(k)})_{1 \leqslant i \leqslant n}$, on obtient :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{P}\left(A_j^{(k+1)}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left(A_i^{(k)}\right) \mathrm{P}_{A_i^{(k)}}\left(A_j^{(k+1)}\right).$$

Or, par hypothèse de l'énoncé, la probabilité conditionnelle de $A_j^{(k+1)}$ sachant $A_i^{(k)}$ ne dépend pas de l'étape k, et est égale à $t_{i,j}$, donc cette égalité devient :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad p_j^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} p_i^{(k)} t_{i,j}.$$

Ces égalités se résument matriciellement en : $P^{(k+1)} = P^{(k)}T$, d'où le résultat.

Q 3. Une récurrence facile donne : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)} = P^{(0)}T^k$.

Q 4. Si la suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur P, alors $(P^{(k+1)})_{k \in \mathbb{N}}$ également. De plus, l'application $L \mapsto LT$ est continue sur $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ en tant qu'application linéaire sur un espace vectoriel réel de dimension finie ; donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} P^{(k)}T = PT.$$

D'après tout ce qui précède, prendre la limite quand $k \to +\infty$ dans l'égalité : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = P^{(k)}T$, nous donne : $P = PT$, d'où la première assertion.

Pour montrer que le vecteur limite $P = (p_1, \ldots, p_n)$ vérifie : $\forall i \in \mathbb{N}$, $p_i \geqslant 0$, notons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ la suite $\left(p_i^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers p_i (puisque $(P^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers P, ce qui implique la convergence composante par composante). Or les $p_i^{(k)}$ sont des probabilités, donc sont des réels positifs pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}$. Prendre la limite quand $k \to +\infty$ dans l'inégalité :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad p_i^{(k)} \geqslant 0$$

implique : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $p_i \geqslant 0$.

Enfin, rappelons que d'après la première question, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{(k)} = 1$. Par conséquent, quand $k \to +\infty$, l'égalité rappelée ci-avant devient : $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, d'où la dernière propriété demandée.

I.B – Marche aléatoire sur un tétraèdre

Q 5. D'après la description du graphe donnée, et l'équiprobabilité de se déplacer sur chaque sommet adjacent, on a :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(J_4 - I_4\right).$$

Q 6. La matrice T est symétrique et à coefficients réels, donc d'après le théorème spectral elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres (la matrice de passage de la base canonique dans cette base orthonormée est alors une matrice orthogonale). Précisons les valeurs propres de T : la matrice $T + \frac{1}{3}\mathrm{I}_3 = \frac{1}{3}J_4$ est de rang 1, donc d'après le théorème du rang le sous-espace propre de T associé à la valeur propre $-\frac{1}{3}$ est de dimension 3. Si l'on note $\lambda \in \mathbb{R}$ la dernière valeur propre de T (où on les compte avec multiplicités) alors, la trace étant la somme des valeurs propres, on a : $\mathrm{tr}(T) = 0 = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + \lambda = -1 + \lambda$, donc : $\lambda = 1$.

On a déterminé les quatre valeurs propres de T, comptées avec multiplicités : $-\frac{1}{3}$ est valeur propre triple et 1 est valeur propre simple. En récapitulant tout ce que nous avons dit, on en déduit qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$ telle que :

$$T = Q \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{3} Q \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Q^{\top},$$

d'où le résultat.

Q 7. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad T^k = Q \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k Q^{\top} = Q \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{\top}.$$

Or $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$, donc : $\lim\limits_{k \to +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 0$. En prenant la limite composante par composante, on a donc :

$$\lim_{k \to +\infty} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'application $M \mapsto QMQ^{\top}$ étant continue sur $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ en tant qu'application linéaire sur un espace vectoriel réel de dimension finie, on en déduit :

$$\lim_{k \to +\infty} T^k = \lim_{k \to +\infty} Q \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{3}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{\top} = Q \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{\top}.$$

Notons T_ℓ la matrice limite que nous venons de trouver. On a clairement $T_\ell^2 = T_\ell$, donc T_ℓ est une matrice de projecteur. Comme elle est symétrique (réelle), il s'agit plus précisément d'une matrice de projecteur orthogonal. Pour déterminer ses caractéristiques géométriques, il suffit de déterminer $\mathrm{im}(T_\ell)$. Pour cela, on note d'abord que l'image de T_ℓ est de dimension 1 (plusieurs arguments permettent de le remarquer ; notons par exemple que T_ℓ est de trace égale à 1, et pour un projecteur sa trace est égale à son rang), donc il suffit d'un seul vecteur non nul pour l'engendrer. Comme $\mathrm{im}(T_\ell) = \ker(T_\ell - I_4)$ pour un projecteur, déterminer un vecteur non nul de l'image revient à déterminer un vecteur propre de T_ℓ associé à la valeur propre 1. Or il est facile de constater que $U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de T pour la valeur propre 1 (la somme des coefficients de chaque ligne de T est égale à 1). Par une récurrence immédiate : $\forall k \in \mathbb{N}$, $T^k U = U$. Un argument de continuité maintes fois invoqué ci-dessus permet d'en déduire, quand $k \to +\infty$: $T_\ell U = U$. Ainsi U est un vecteur propre de T_ℓ également pour la valeur propre 1, et d'après la discussion ci-dessus on en déduit :

$$\mathrm{im}(T_\ell) = \ker(T_\ell - I_4) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(U).$$

En conclusion : la suite de matrices $(T^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice du projecteur orthogonal sur la droite engendrée par $U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Q 8. Nous avons vu dans la question **Q 3** que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $P^{(k)} = P^{(0)}T^k$. Or la suite $\left(T^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge d'après la question précédente (vers une matrice que nous avons notée T_ℓ), et l'application $M \mapsto P^{(0)}M$ est continue sur $\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ en tant qu'application linéaire sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Donc, par la caractérisation séquentielle de la continuité, la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(P^{(0)}T^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $P^{(0)}T_\ell$. Notons $P = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ cette limite dans la suite de cette question.

De plus, on déduit de la question **Q 4** que P vérifie : $PT = P$. En transposant : $T^\top P^\top = P^\top$, donc $P^\top$ appartient au sous-espace propre de $T^\top = T$ associé à la valeur propre 1, qui est engendré par $U = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ (vérification facile, partant des deux questions précédentes). Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $P^\top = \lambda U$. Par identification, on obtient : $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \lambda$. Or nous rappelons que, toujours d'après la question **Q 4**, on doit avoir : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$, ce qui impose : $\lambda = \frac{1}{4}$. Autrement dit : $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$.

Nous avons donc démontré que quel que soit le vecteur initial $P^{(0)}$, la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur ligne $P = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

I.C – Marche aléatoire sur une pyramide tronquée à base carrée

Q 9. On a :

$$T = \begin{pmatrix}
0 & \frac13 & 0 & \frac13 & \frac13 & 0 & 0 & 0\\
\frac13 & 0 & \frac13 & 0 & 0 & \frac13 & 0 & 0\\
0 & \frac13 & 0 & \frac13 & 0 & 0 & \frac13 & 0\\
\frac13 & 0 & \frac13 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac13\\
\frac13 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac13 & 0 & \frac13\\
0 & \frac13 & 0 & 0 & \frac13 & 0 & \frac13 & 0\\
0 & 0 & \frac13 & 0 & 0 & \frac13 & 0 & \frac13\\
0 & 0 & 0 & \frac13 & \frac13 & 0 & \frac13 & 0
\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Il peut être préférable d'écrire par blocs cette matrice. Si l'on note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors : $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} A & I_4 \\ I_4 & A \end{pmatrix}$. Cela peut par ailleurs alléger le calcul demandé ensuite : si l'on pose $V = (1,1,1,1)$, alors $VA = 2V$ (calcul direct), et donc :

$$(1,1,1,1,1,1,1,1)T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} V & V \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & I_4 \\ I_4 & A \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} VA + V & A + VA \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3V & 3V \end{pmatrix}$$
$$= (1,1,1,1,1,1,1,1)\,.$$

Q 10. La description explicite du graphe, donnée dans la figure 2 du document, montre que toutes les arêtes de G sont de la forme (s, s') ou (s', s) avec $s \in S_1$ et $s' \in S_2$. D'où le résultat.

Une interprétation matricielle de ce résultat, et que nous utiliserons dans la question suivante, est la suivante : posons

$$A = \left\{(\alpha_1, 0, \alpha_3, 0, 0, \alpha_6, 0, \alpha_8) \mid (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_8) \in \mathbb{R}^4\right\},$$

et :

$$B = \left\{(0, \alpha_2, 0, \alpha_4, \alpha_5, 0, \alpha_7, 0) \mid (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7) \in \mathbb{R}^4\right\}.$$

Pour comprendre ce qui motive la définition de A et B dans ce contexte : si $k \in \mathbb{N}$, alors $P^{(k)} \in A$ si et seulement si le point est en un sommet de $S_1 = \{1, 3, 6, 8\}$ à l'étape k (en effet, dans ce cas la probabilité d'être en un autre sommet est nulle), et de même $P^{(k)} \in B$ si et seulement si le point est en un sommet de $S_2 = \{2, 4, 5, 7\}$ à l'étape k. Alors, le résultat de cette question revient à affirmer :

$$\forall L \in A,\ LT \in B, \quad \text{et :} \quad \forall L \in B,\ LT \in A,$$

ce qui se voit facilement par un calcul direct.

Q 11. Rappelons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $P^{(k+1)} = P^{(k)}T$ (question **Q 2**). Comme $P^{(0)} \in A$, d'après la question précédente et cette relation de récurrence on a $P^{(1)} \in B$, et plus généralement (par une récurrence facile) :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{(2k)} \in A,\ P^{(2k+1)} \in B.$$

Voyons comment en déduire que la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas : raisonnons par l'absurde, et supposons que cette suite converge vers un vecteur P. Alors les suites extraites $\left(P^{(2k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(P^{(2k+1)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent également vers P. Ce sont deux suites convergentes à valeurs dans A et dans B respectivement, et comme A et B sont des parties fermées de $\mathbb{R}^8$ (nous le justifions plus bas), on en déduit que leur limite P appartient à A et B. Or : $A \cap B = \{\vec{0}\}$, donc le fait que $P \in A \cap B$ implique que P est le vecteur nul. C'est impossible, puisque la somme des coefficients de P doit être égal à 1 d'après la question **Q 4** : nous avons une contradiction.

Par l'absurde, nous avons démontré que la suite $\left(P^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Justifions à présent que A et B sont des parties fermées de $\mathbb{R}^8$. On peut le justifier *via* la caractérisation séquentielle des fermés : si une suite $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A est convergente, alors elle converge composante par composante, or ses composantes sont nulles aux positions 2, 4, 5 et 7. On en déduit que sa limite $\vec{x}$ admet également des coefficients nuls aux positions 2, 4, 5 et 7, donc $\vec{x} \in A$. De même pour B.

Il est intéressant de savoir qu'en fait, tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est fermé (ce qu'on peut démontrer en l'écrivant comme le lieu d'annulation d'une projection parallèlement à ce sous-espace par exemple).