Correction DS 5 - version normale

Espaces vectoriels normés - Séries

Exercice 1

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on trouve

$$||\mathrm{X}^n - 0|| = \frac{1}{2^n}.$$

On observe que ceci tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui prouve que la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul pour la norme $||\ ||$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on trouve

$$\mathrm{N}(\mathrm{X}^n - 1) = \frac{1}{n}.$$

Ceci tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, si bien que la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme 1 pour la norme N.

3. On remarque que la somme des coefficients s'annule encore pour $\mathrm{X}^n - \mathrm{X}$, mais l'autre somme ne tend pas vers 0 à cause du coefficient a_1. Il suffit de modifier la deuxième somme pour qu'elle ne tienne plus compte de a_1. Cependant, pour qu'elle vérifie encore la propriété de séparation, il faut insérer a_0. Posons donc

$$\mathrm{M}(\mathrm{P}) = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + |a_0| + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

On peut vérifier que M est une norme sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, on trouve $\mathrm{M}(\mathrm{X}^n - \mathrm{X}) = 1/n$, ce qui donne la convergence souhaitée.

Exercice 2

1. Pour justifier le fait que $N_1(P) = 0$ implique $P = 0$ (et de même pour N_2), on invoque le fait qu'un polynôme qui admet une infinité de racines réelles est le polynôme nul. Le reste est similaire au cas classique des normes du type $\|\cdot\|_\infty$.

2. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$|\phi(P)| = |P(0)| \leq \sup\{|P(x)|, x \in [0,1]\} = N_1(P),$$

donc la forme linéaire ϕ est continue pour N_1.

3. Soit $P_n(t) = (1 - \frac{t}{2})^n$. Alors

$$|\phi(P_n)| = |P_n(0)| = 1$$

tandis que

$$N_2(P_n) = \frac{1}{2^n},$$

et donc il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$|\phi(P)| \leq C\, N_2(P).$$

4. Les normes N_1 et N_2 ne peuvent être équivalentes, sinon ϕ serait continue pour les deux normes, ou discontinue pour les deux normes (petit exercice facile, à faire !).

5. Soit $P \in O$ et $r = |P(0)| > 0$. Alors $B_{N_1}(P, r) \subset O$: si $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $N_1(P - Q) < r$,, on doit avoir en particulier

$$|Q(0)| > |P(0)| - r = 0,$$

et donc $Q \in O$. L'ensemble O est donc ouvert pour N_1.

En revanche, O n'est pas ouvert pour N_2, car la suite $(1 - P_n)_n$, qui est à valeurs dans O^c, tend vers le polynôme P tel que $P(X) = 1$ pour la norme N_2, et $P \in O$. Si O était ouvert pour N_2, O^c serait fermé, et donc la limite P de la suite $(1 - P_n)$ d'éléments de O^c devrait appartenir à O^c, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 4

$\boxed{1}$ Il faut que $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$. Donc $D_f =]-\infty;1[$.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow x + \ln(1-x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$\boxed{2}$ On a $\forall x \in]-1;+\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(1-\frac{1}{n}) \leq -\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 0$

$\boxed{3}$ $u_n = \frac{1}{n} + \ln(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Ainsi $\begin{cases} |u_n| \sim \frac{1}{2n^2} \\ |u_n| \text{ et } \frac{1}{2n^2} \text{ sont positifs.} \\ \sum \frac{1}{2n^2} \text{ cvg d'après Riemann.} \end{cases}$

D'après le th de comparaison $\sum u_n$ est AC donc cvg.

$\boxed{4}$ $f(x) = x - \ln(1+x)$ Dérivable et définie sur $]-1;+\infty[$ et

$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi f est $\nearrow$ sur $[0,1]$ et $f \geq 0$ sur $[0,1]$

[5] $v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$$\begin{cases} v_n \sim \frac{1}{2n^2} \\ v_n \text{ et } \frac{1}{2n^2} \text{ positives} \\ \sum \frac{1}{2n^2} \text{ cvg d'après Riemann} \end{cases}$$

Donc d'après le th de comparaison $\sum v_n$ cvg.

[6] • $v_n - u_n = 1 - \ln(2) - 1 = -\ln(2)$ si $n = 1$

$v_n - u_n = \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)$

$= -\ln(n+1) + 2\ln(n) - \ln(n-1)$

• $\sum_{n=1}^{N} v_n - u_n = -\ln(2) - \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) + 2\sum_{n=2}^{N} \ln(n) - \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1)$

$= -\ln(2) - \sum_{n=3}^{N+1} \ln(n) + 2\sum_{n=2}^{N} \ln(n) - \sum_{n=1}^{N-1} \ln(n)$

$= -\cancel{\ln(2)} - (\ln(N+1) + \ln(N)) + 2\ln(N) + 2\cancel{\ln(2)} - \cancel{\ln(1)} - \cancel{\ln(2)}$

$= \ln(N) - \ln(N+1)$

[7]. $\sum_{n=1}^{N} v_n - u_n = \ln\left(\frac{N}{N+1}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

Donc les suites sont adjacentes

• De plus $v_n < 0$ et $u_n > 0 \Rightarrow (\sum u_n)^S \searrow \quad \sum u_n{}_S \nearrow$

[8] comme $\sum v_n{}_S \nearrow$ et $\sum u_n^S \searrow$ on a

$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, \quad v_p < \gamma < u_q$

on prend $\begin{cases} q = 1 \\ p = 1 \end{cases}$ $0 < 1 - \ln 2 < \gamma < u_1 = 1$

$\boxed{9}$ Comme $\frac{1}{x} \searrow$ sur $]0;+\infty[$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$$

En sommant entre $k=1$ et $k=n-1$, on obtient

$$h_n - 1 \underset{①}{\leq} \underbrace{\int_1^n \frac{1}{x}dx}_{\ln(n)} \underset{②}{\leq} h_n - \frac{1}{n} = h_{n-1}$$

Donc (1) $\Rightarrow h_n \leq \ln(n)+1$

(2) $\Rightarrow \ln(n+1) \leq h_n$. (en remplaçant $n \to n+1$)

$\boxed{10}$ $f_{n+1} - f_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n))$.

En utilisant le TAF sur ln entre n et n+1, il existe c dans

$\boxed{11}$ • D'après la question 9, on a :

$\ln(n) \leq \ln(n+1) \leq h_n$

donc $f_n = h_n - \ln(n) \geq 0$.

Ainsi $(f_n) \searrow$ et minorée par 0, elle est donc cvg.

$$\bullet \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) + u_1$$

$$= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1) - \ln(n) + 1$$

Par somme télescopique, on obtient.

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = h_N + \ln(1) - \ln(N+1)$$

$$= f_N + \ln(N) - \ln(N+1)$$

En passant à la limite, on trouve $f_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \gamma$.

12) $I(a) = \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^r} = \left[\frac{t^{-r+1}}{-r+1} \right]_a^{+\infty} = \frac{a^{-r+1}}{r-1}$

13) $n^r(w_{n+1} - w_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |n^r(w_{n+1} - w_n) - \ell| \leq \varepsilon$.

on choisit ε tq $[\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon] \subset [a, b]$. Ainsi

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \quad a \leq \ell - \varepsilon \leq n^r(w_{n+1} - w_n) \leq \ell + \varepsilon \leq b$

14)
D'après la question 13, on a :

$$\frac{a}{k^r} \leq w_{k+1} - w_k \leq \frac{b}{k^r} \quad (1)$$

$$\text{or} \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{t^r} dt \leq \frac{1}{k^r} \quad \text{et} \quad \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^r} dt \geq \frac{1}{k^r}$$

$$\text{donc } (1) \Leftarrow \quad a \int_k^{k+1} \frac{1}{t^r} dt \leq w_{k+1} - w_k \leq b \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^r} dt.$$

On fait la somme pour k variant de N à n, en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$a \int_N^{n+1} \frac{1}{t^r} dt \leq w_{n+1} - w_N \leq b \int_{N-1}^{n} \frac{1}{t^r} dt.$$

15) On fait tendre n vers $+\infty$, on obtient.

$$a\, I(N) \leq 0 - w_N \leq b\, I(N-1)$$

$$\Leftarrow \quad -b\, I(n-1) \leq w_N \leq -a\, I(n).$$

$\boxed{16}$ On remplace par l'expression de I trouvée en $\boxed{12}$

$$-b\,\frac{(N-1)^{-r+1}}{r-1} \leq w_N \leq -a\,\frac{N^{-r+1}}{r-1}$$

Donc $$-\frac{b}{r-1}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-r+1} \leq N^{r-1} w_N \leq \frac{-a}{r-1} \quad (*)$$

soit $\varepsilon > 0$, on pose $\begin{cases} a = \ell - \varepsilon \\ b = \ell + \varepsilon \end{cases}$

$$(*) \Rightarrow -\frac{b}{r-1}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-r+1} - \frac{\ell}{r-1} \leq N^{r-1} w_N + \frac{\ell}{r-1} \leq \frac{\varepsilon}{r-1} \quad (*)$$

comme $\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-r+1} \longrightarrow 1$

APCR $-\left(\frac{N-1}{N}\right)^{-r+1} \geqslant 2$

$$(*) \Rightarrow \frac{-2b-\ell}{r-1} \leq N^{r-1} w_N + \frac{\ell}{r-1} \leq \frac{\varepsilon}{r-1}$$

or $\ell > 0$ donc $-2\ell \leq -\ell$.

$$(*) \Leftrightarrow -2\,\frac{\varepsilon}{r-1} \leq N^{r-1} w_N + \frac{\ell}{r-1} \leq \frac{\varepsilon}{r-1} \leq \frac{2\varepsilon}{r-1}$$

En posant $\varepsilon' = \frac{2\varepsilon}{r-1}$, on obtient la définition de la limite.

$$N^{r-1} w_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} -\frac{\ell}{r-1}$$