Correction DS 5 - version difficile

Espaces vectoriels normés - Séries

Exercice 1

Dans tout ce corrigé, nous noterons T l'opérateur de Stein, c'est-à-dire l'application qui à une suite $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n = \lambda f_{n+1} - n f_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'application T est clairement linéaire, et un certain nombre de questions auront avantage à être vues à l'aide de cet opérateur. Enfin, quand une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, nous noterons $\|u\|_\infty$ la borne supérieure des $|u_n|$, pour n décrivant $\mathbb{N}$.

I Préliminaires

1) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^n}{n!}$ est réputée convergente de somme égale à e^λ, donc :

$$\boxed{\text{la suite } \left(c\frac{\lambda^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ appartient à } \mathcal{P} \text{ si et seulement si } c = \mathrm{e}^{-\lambda}.}$$

2) Notons $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites en jeu. Si $A \subset \mathbb{N}$, on a

$$\varphi(A) := \sum_{n\in A} p_n - \sum_{n\in A} q_n = \mathbf{1}_A(0)(q-p) + \mathbf{1}_A(1)(p-q) \in \{0, q-p, p-q\},$$

donc $|\varphi(A)| \leq |p-q|$. Par ailleurs, en prenant $A = \{0\}$ (ou $A = \{1\}$), on a bien $\varphi(A) = |p-q|$, donc ce majorant est en fait un maximum, donc la borne supérieure. Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{dist}((1-p, p, 0, \ldots), (1-q, q, 0, \ldots)) = |p-q|}$$

3) Puisque f est bornée, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |f(n)p_n| \leq \|f\|_\infty p_n.$$

On $\sum p_n$ est convergente, donc par comparaison de séries à termes positifs :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)p_n \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$$

II Caractérisation

4) Ici, on a la majoration (pour $n \geq 1$) :

$$\left|nf(n)p_n^{(\lambda)}\right| \leq |\lambda|\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\|f\|_\infty \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!},$$

or $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$ est convergente, donc comme dans la question précédente :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} nf(n)p_n^{(\lambda)} \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$$

5) Tout d'abord, les deux séries en jeu sont (absolument) convergentes d'après les questions précédentes. Ensuite, travaillons sur les sommes partielles, en fixant $N \in \mathbb{N}$: on a alors par translation d'indice :

$$\lambda \sum_{n=0}^{N} f(n+1)p_n^{(\lambda)} = \lambda \sum_{k=1}^{N+1} f(k) \underbrace{p_{k-1}^{(\lambda)}}_{\frac{k}{\lambda}p_k^{(\lambda)}} = \sum_{k=1}^{N+1} kf(k)p_k^{(\lambda)}.$$

Quand N tend vers $+\infty$, toutes les sommes convergent, et on a en passant la relation précédente à la limite :

$$\boxed{\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1) p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n f(n) p_n^{(\lambda)}}$$

(On a réindexé la deuxième somme par n plutôt que k, puis ajouté le terme (nul) pour $n = 0$.)

6) Si on fixe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et qu'on prend $f = \mathbf{1}_{\{n_0\}}$, l'identité vérifiée par f et Q fournit : $\lambda q_{n_0-1} = n_0 q_{n_0}$, donc :

$$\forall n > 0, \qquad q_n = \frac{\lambda}{n} q_{n-1}.$$

On montre alors par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad q_n = \frac{\lambda^n}{n!} q_0.$$

La condition de normalisation $Q \in \mathcal{P}$ et la première question nous assurent alors que $q_0 = \mathrm{e}^{-\lambda}$, et ainsi :

$$\boxed{Q = P_\lambda}$$

III Résolution de l'équation de Stein

7) Analyse : Supposons que $f \in \mathcal{S}_h$. On a alors $\lambda f(1) - 0 f(0) = \widetilde{h}(0)$, donc

$$f(1) = \frac{\widetilde{h}(0)}{\lambda} = \frac{0!}{\lambda^1} \sum_{k=0}^{0} \widetilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, la relation

$$f(n+1) = \frac{n}{\lambda} f(n) + \widetilde{h}(n)$$

permet d'établir par récurrence simple (mais probablement à rédiger par les candidats prudents) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Synthèse : Supposons que f est une suite de réels vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lambda f(n+1) - n f(n) = \frac{n!}{\lambda^{n+1-1}} \sum_{k=0}^{n} \widetilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} - n \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{n!}{\lambda^n} \widetilde{h}(n) \frac{\lambda^n}{n!},$$

soit finalement : $\lambda f(n+1) - n f(n) = \widetilde{h}(n)$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $f \in \mathcal{S}_H$.

$$\boxed{\mathcal{S}_h \text{ possède une infinité d'éléments, qui sont les suites } f \text{ vérifiant } f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!} \text{ pour tout } n \geq 1.}$$

L'infinité d'éléments vient du fait qu'on prend $f(0)$ quelconque ! Parions que la synthèse (pourtant très accessible) n'aura pas été faite dans beaucoup de copies, et que ça aura été une des questions discriminantes.

8) Au vu de la question précédente, il s'agit de montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{h}(n)\frac{\lambda^n}{n!}$ est (convergente et) de somme nulle. Puisque h est bornée, $\widetilde{h}$ l'est aussi, et la convergence (absolue) est donc acquise. Considérons alors la somme partielle, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{N} \widetilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} h(k)\frac{\lambda^k}{k!} - \left(\sum_{k=0}^{\infty} h(k)p_k^{(\lambda)}\right)\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{\lambda^k}{k!}\right)$$

Lorsque N tend vers $+\infty$, les trois sommes convergent. Puisque d'une part la dernière tend vers e^λ et d'autre part $\mathrm{e}^\lambda p_k^{(\lambda)} = \frac{\lambda^k}{k!}$, on obtient bien en passant la relation précédente à la limite :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\frac{\lambda^k}{k!} - \left(\sum_{k=0}^{\infty} h(k)\mathrm{e}^\lambda p_k^{(\lambda)}\right) = 0$$

Finalement, grâce à la question précédente :

$$\boxed{f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=n}^{\infty}\widetilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}}$$

9) En majorant chaque $\left|\widetilde{h}(k)\right|$ par $\left\|\widetilde{h}\right\|_\infty$ (on a déjà constaté que $\widetilde{h}$ est bornée), on obtient (après un éventuel passage par une somme partielle :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|\sum_{k=n}^{\infty}\widetilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}\right| \leq \left\|\widetilde{h}\right\|_\infty \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

La somme du membre de droite est le reste de la série exponentielle, donc vaut $\mathrm{e}^\lambda - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}$·. On contrôle cette différence de façon « classique » (mais sans indication, ça me semble hard !) par l'inégalité de Taylor-Lagrange pour la fonction exponentielle sur $[0, \lambda]$ (ou par la formule de Taylor avec reste intégral suivie d'une majoration de l'intégrale, l'inégalité de Taylor-Lagrange n'étantplus au programme ; on pouvait aussi majorer $\dfrac{1}{k!}$ par $\dfrac{1}{(k-n)!n!}$ dans le reste initial, ce qui conduit ultimement au même majorant) :

$$\left|\mathrm{e}^\lambda - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}\right| \leq \frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^\lambda.$$

Ainsi, en recollant les morceaux :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |f(n)| \leq \frac{1}{n}\mathrm{e}^\lambda \left\|\widetilde{h}\right\|_\infty,$$

donc la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc est bornée.

$$\boxed{\text{Tous les éléments de } \mathcal{S}_h \text{ sont bornés.}}$$

IV Propriété de Lipschitz

10) Fixons m et n tels que $1 \leq n \leq m$. On a alors $\widetilde{h}(n) = h(n) - p_m^{(\lambda)} = \begin{cases} 1 - p_m^{(\lambda)} & \text{si } m = n \\ -p_m^{(\lambda)} & \text{sinon} \end{cases}$ or dans $\sum_{k=0}^{n-1}\widetilde{h}(k)\frac{\lambda^k}{k!}$, on a $k < n \leq m$, donc

$$f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n}\sum_{k=0}^{n-1}(-p_m^{(\lambda)})\frac{\lambda^k}{k!},$$

ce qui est le résultat attendu.

$$\boxed{\text{Si } 1 \leq n \leq m, \text{ alors } f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}\cdot}$$

11) Si $0 \leq m < n$ et $k \geq n$, on a $m \neq k$, donc $\widetilde{h}(k) = -p_m^{(\lambda)}$.

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq m < n, \text{ alors } f_m(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\cdot}$$

Pour $n > 1$, le signe de $f_m(n)$ se déduit immédiatement des deux expressions trouvées précédemment :

$$\boxed{f_m(n) \text{ est strictement négatif si } 1 \leq n \leq m \text{ et strictement positif si } 0 \leq m < n.}$$

12) **Supposons d'abord : $1 \leq n < m$.**
On a alors n et $n+1$ dans $[\![1, m]\!]$, donc grâce à la question 10 et après factorisation :

$$\Delta f_m(n) = -\frac{(n+1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \left(\frac{n}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

On a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $\dfrac{n}{\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} \geq k \dfrac{\lambda^{k-1}}{k!} = \dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ donc :

$$\frac{n}{\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \geq \frac{n}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!},$$

ce qui prouve : $\Delta f_m(n) \leq 0$.
Supposons maintenant : $m < n$.
On a cette fois :

$$\Delta f_m(n) = -\frac{(n+1)!}{\lambda^n} p_m^{(\lambda)} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} - \frac{n}{\lambda} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

La majoration $\dfrac{n}{k!} \leq \dfrac{1}{(k-1)!}$, valable pour tout $k \geq n+1$, après multiplication par λ^{k-1}, sommation et décalage... nous fournit à nouveau : $\Delta f_m(n) \leq 0$.

$$\boxed{\Delta f_m \text{ est négative sur } \mathbb{N} \setminus \{0, m\}.}$$

13) Tout d'abord, notons que :

$$\boxed{\text{On n'a pas forcément } \Delta f_0(0) = \frac{1 - \mathrm{e}^{\lambda}}{\lambda}\cdot}$$

En effet, si $f_0(1)$ vaut effectivement $\dfrac{1-\mathrm{e}^{\lambda}}{\lambda}$, $f_0(0)$ est quelconque. C'est sans conséquence mathématique dans la suite ; espérons seulement que les candidats n'auront pas passé trop de temps et d'énergie pour essayer de prouver cette relation. Mais attendez, j'ai une vision : le rapport du jury va dire que « cette erreur mineure n'a absolument pas handicapé les candidats. » Nous voila rassurés !
Fixons $m > 0$. On a :

$$\Delta f_m(m) = f_m(m+1) - f_m(m) = \underbrace{\frac{m!}{\lambda^{m+1}} p_m^{(\lambda)}}_{\mathrm{e}^{-\lambda}/\lambda} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \underbrace{\frac{(m-1)!}{\lambda^m} p_m^{(\lambda)}}_{\mathrm{e}^{-\lambda}/m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Dans la dernière somme, une translation d'indice donne :

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{r=1}^{m} \frac{\lambda^{r-1}}{(r-1)!} = \sum_{r=1}^{m} \frac{r}{\lambda} \frac{\lambda^r}{r!}.$$

Il n'y a plus qu'à recoller les morceaux (en déplaçant les quotients m et λ) :

$$\boxed{\Delta f_m(m) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \cdot}$$

14) D'après les deux dernières question, $\sup\limits_{n \geq 1} \Delta f_m(n) = \Delta f_m(m)$. Mais dans la dernière somme de l'expression trouvée à la question précédente, on peut majorer $\dfrac{k}{m}$ par 1, ce qui fournit :

$$\Delta f_m(m) \leq \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} (\mathrm{e}^{\lambda} - 1),$$

soit finalement :

$$\boxed{\sup_{n \geq 1} \Delta f_m(n) \leq \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \cdot}$$

15) L'ensemble $\mathcal{S}_h$ est donné (question 7) par la connaissance des $\widetilde{h}(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Or, si $n \in \mathbb{N}$ on a (en notant $I = \inf\limits_{k \in \mathbb{N}} h(k)$) :

$$\widetilde{h_+}(n) = \underbrace{h_+(n)}_{h(n)-I} - \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{h_+(k)}_{h(k)-I} p_n^{(\lambda)} = h(n) - I + I \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(\lambda)}}_{1} = \widetilde{h}(n),$$

donc :

$$\boxed{\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h_+}}$$

16) *Notons que pour que les professeurs puissent continuer d'expliquer à leurs élèves qu'une série et son éventuelle somme sont deux choses différentes, il aurait été intéressant que l'énoncé ne confonde pas les deux !*

On sait que d'une part h est bornée (donc h_+ aussi) et que d'autre part $f_m(n)$ est de la forme (pour $m \geq n$) : $f_m(n) = K_n \dfrac{\lambda^m}{m!}$, donc on a une majoration de la forme :

$$h_+(m) f_m(n) = O\left(\frac{\lambda^m}{m!}\right)$$

donc par comparaison de séries à termes positifs,

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{N}} h_+(m) f_m(n) \text{ est absolument convergente donc convergente.}}$$

17) Soit f définie comme dans l'énoncé. Il s'agit de montrer : $T(f) = \widetilde{h}$, ou encore (question 15) : $T(f) = \widetilde{h_+}$. Commençons par un calcul formel, qui guidera le calcul ultérieur. On écrit $f = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} h_+(m) f_m$, puis (en signalant les deux égalités « discutables ») :

$$T(f) \overset{*}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) T(f_m) = \sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) \widetilde{\mathbf{1}_{\{m\}}} \overset{*}{=} \widetilde{\sum_{m=0}^{+\infty} h_+(m) \mathbf{1}_{\{m\}}} = \widetilde{h_+}.$$

Formalisons tout cela. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on va montrer : $T(f)(n) = \widetilde{h_+}(n)$. C'est parti !

$$\begin{aligned}
T(f)(n) &= \lambda \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n+1) - \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) n f_m(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) T f_m(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) \widetilde{\mathbf{1}_{\{m\}}}(n) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) \left(\mathbf{1}_{\{m\}}(n) - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{m\}}(k) p_k^{(\lambda)}}_{p_m^{(\lambda)}} \right) = h_+(n) - \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) p_m^{(\lambda)} = \widetilde{h_+}(n)
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $T(f) = \widetilde{h_+}$, donc :

$$\boxed{f \in \mathcal{S}_{h_+} = \mathcal{S}_h}$$

L'énoncé est ici extrèmement maladroit : il y a une confusion entre cette fonction f très particulière appartenant à $\mathcal{S}_h$ et une fonction f générique de $\mathcal{S}_h$ (qui, certes, diffèrent de peu, mais...).

18) Prenons $f \in \mathcal{S}_h$. Cette application coincide sur $\mathbb{N}^*$ avec l'application des deux questions précédentes, donc si on fixe $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$f(n+1) - f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) \left(f_m(n+1) - f_m(n) \right).$$

Dans cette somme, tous les termes sont négatifs (question 12) sauf celui d'indice $m = n$; ainsi :

$$f(n+1) - f(n) \leq h_+(n) \left(f_n(n+1) - f_n(n) \right) = h_+(n) \Delta f_n(n).$$

Or d'une part $f_n(n) \leq \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$ (question 14) et d'autre part

$$h_+(n) = h(n) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k),$$

et donc (on multiplie des inégalités entre des quantités positives) :

$$\boxed{f(n+1) - f(n) \leq \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbb{N}} h(k) \right).}$$

Exercice 2

Partie A - Un exemple

1) - Notons σ le cycle $(n, n-1, ..., 2, 1)$ qui est un élément de S_n.
Alors $J = M_\sigma$ donc $\boxed{J \text{ est une matrice de permutation}}$
   - Le calcul du polynôme caractéristique donne par développement par rapport à la première colonne :
$\det(XI_n - J) = X^n + (-1)^{n+1)} \times (-1) \times (-1)^{n-1} = X^n - 1$
ce qui donne $\boxed{Sp(J) = \{e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!]\}}$
Le polynôme $X^n - 1$ est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$ donc $\boxed{J \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C}}$.

2) Dans cette question, on pose $w = e^{2i\pi/n}$.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $V_k = \begin{pmatrix} 1 \\ w^k \\ w^{2k} \\ \vdots \\ w^{(n-1)k} \end{pmatrix}$

Alors $JV_k = \begin{pmatrix} w^k \\ w^{2k} \\ w^{3k} \\ \vdots \\ w^{(n-1)k} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^k \\ w^{2k} \\ w^{3k} \\ \vdots \\ w^{(n-1)k} \\ w^{nk} \end{pmatrix} = w^k V_k$

On note également que $V_k \neq 0$.
Ainsi, $(V_0, ..., V_{n-1})$ est une famille de vecteurs propres associés aux n valeurs propres distinctes deux à deux $1, w, ..., w^{n-1}$ de J.
C'est donc une famille libre de n vecteurs de $\mathbb{C}^n$ et $\dim(\mathbb{C}^n) = n$.
Donc $\boxed{(V_0, ..., V_{n-1}) \text{ constitue une base de } \mathbb{C}^n \text{ de vecteurs propres de } J}$.

3) - On a directement $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
   - Soit $m \in \mathbb{N}$.
Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
On travaille ici modulo n et on note que les événements $\{X_m = k-1\}$ et $\{X_m = k+1\}$ sont incompatibles car $k - 1 \neq k + 1$ modulo n ($n \geq 3$).
D'après la définition, $P(X_{m+1} = k) = \dfrac{1}{2}P(X_m = k-1) + \dfrac{1}{2}P(X_m = k+1)$.

Donc $U_{m+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & & & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \ddots & (0) & \\ & 1/2 & \ddots & 1/2 & \\ (0) & & \ddots & 0 & 1/2 \\ 1/2 & & & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \times U_m = AU_m$ en posant $\boxed{A = \dfrac{1}{2}(J + J^{n-1})}$

4) - On reprend les notations de la question 2)
J est semblable à la matrice $Diag(1, w, ..., w^{n-1})$.

Donc $\frac{1}{2}(J+J^{n-1})$ est semblable à la matrice $Diag\left(1, \frac{1}{2}(w+w^{n-1}), ..., \frac{1}{2}(w^{n-1}+w^{(n-1)(n-1)})\right)$.
Pour $k \in [\![0, n-1]\!], w^k + w^{(n-1)k} = w^k + w^{-k} = 2\text{Re}(w^k) = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$
Ainsi, A est diagonalisable et ses valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) sont les réels de la liste $(\cos(2k\pi/n))_{k\in[\![0,n-1]\!]}$

- Toutes les valeurs propres de A sont inférieures ou égales à 1 en module et 1 est valeur propre de A.

$\boxed{\text{Le vecteur } V = \frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \text{ est vecteur propre unitaire associé à la valeur propre } 1}$.

5) n est impair donc pour tout $k \in [\![1, n-1]\!], |\cos(2k\pi/n)| < 1$.
La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormale.
D'après la question précédente, il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$, de première colonne V telle que $PD^tP = A$ avec $D = \text{Diag}(1, \cos(2\pi/n), ..., \cos(2(n-1)\pi/n))$.
Pour tout $m \in \mathbb{N}, A^m = PD^m\,{}^tP = P\text{diag}(1, \cos^m(2\pi/n), ..., \cos^m(2(n-1)\pi/n))^tP$(on note que ${}^tP = P^{-1}$)
La suite $(A^m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $P \times \text{diag}(1, 0, ..., 0) \times {}^tP$ (continuité du produit matriciel)
puis, comme $\forall m \in \mathbb{N}, U_m = A^m U_0$ et par continuité du produit matriciel,

$(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $P \times \text{diag}(1, 0, ..., 0) \times {}^tP \times U_0 = \begin{bmatrix} V & (0) & \dots & (0) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} {}^tV \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} \times U_0 \boxed{= \frac{1}{n}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}}$

Partie B

6) Soit $M, N \in \mathcal{B}_n$, $\lambda \in [0, 1]$, et posons $A = (1-\lambda)M + \lambda N$. On a bien :

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_{i,j} = (1-\lambda)M_{i,j} + \lambda N_{i,j} \geq 0 \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^n A_{i,j} = (1-\lambda)\sum_{j=1}^n M_{i,j} + \lambda \sum_{j=1}^n N_{i,j} = 1 \\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{i=1}^n A_{i,j} = (1-\lambda)\sum_{i=1}^n M_{i,j} + \lambda \sum_{i=1}^n N_{i,j} = 1 \end{cases}$$

Donc $\boxed{A \in \mathcal{B}_n}$, ce qui montre la convexité. Passons à la compacité. Puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Choisissons par exemple la norme infinie et soit $B \in \mathcal{B}_n$. On a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ 0 \leq B_{i,j} = 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^n B_{i,k} \leq 1$$

Donc $\mathcal{B}_n$ est borné. De plus, si on se donne une suite $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{B}_n$ qui converge vers $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

- par passage à la limite, C est à termes dans $\mathbb{R}^+$
- par somme sur les limites, on a :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^n C_{i,j} = 1 \\ \forall j \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{i=1}^n C_{i,j} = 1 \end{cases}$$

Donc $\mathcal{B}_n$ est fermé. Comme enfin $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\mathcal{B}_n$ est compact. Notons que $\mathcal{B}_n$ ne peut pas être un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, car il ne contient pas la matrice nulle.

7) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et montrons que $M_\sigma \in \mathcal{P}_n$. Notons que : $\forall (i,j),\ (M_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$. Ainsi :

- pour $i \in [\![1,n]\!]$ fixé, on a $(M_\sigma)_{i,j} = 1$ ssi $\sigma(j) = i$, ssi $j = \sigma^{-1}(i)$. On a donc $\displaystyle\sum_{j=1}^n (M_\sigma)_{i,j} = 1$

- pour $j \in [\![1,n]\!]$ fixé, on a $(M_\sigma)_{i,j} = 1$ ssi $i = \sigma(j)$. On a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (M_\sigma)_{i,j} = 1$

Montrons maintenant que $\mathcal{P}_n$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$:

- d'une part on a $I_n = M_{Id} \in \mathcal{P}_n$
- d'autre part, si on se donne $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$, évaluons $M_\sigma M_\tau$. Si on fixe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on a :

$$(M_\sigma M_\tau)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{k,\tau(j)}$$

  Si $i \neq \sigma(\tau(j))$, on ne pourra jamais avoir simultanément $k = \tau(j)$ et $i = \sigma(k)$ donc on aura nécessairement $(M_\sigma M_\tau)_{i,j} = 0$. Sinon on aura $(M_\sigma M_\tau)_{i,j} = 1$. Finalement on a $\boxed{M_\sigma M_\tau = M_{\sigma\tau}}$ et donc $M_\sigma M_\tau \in \mathcal{P}_n$
- en particulier, si on se donne $\sigma \in \mathcal{S}_n$ on a $M_\sigma M_{\sigma^{-1}} = M_{Id} = I_n$, ce qui montre que $\boxed{M_\sigma \in GL_n(\mathbb{R})}$ et que $(M_\sigma)^{-1} = M_{\sigma^{-1}} \in \mathcal{P}_n$.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et notons d son ordre. Alors on a $(M_\sigma)^d = M_{\sigma^d} = M_{Id} = I_n$, ce qui montre que M_σ annule le polynôme $X^d - 1$, qui est scindé simple sur $\mathbb{C}$. Donc M_σ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

En revanche, $\mathcal{P}_n$ n'est pas convexe comme le montre le contre-exemple suivant. Si on pose $\sigma = (1,2)$ (transposition qui est légitime car $n \geq 2$) puis $A = \dfrac{1}{2}(M_\sigma + I_n)$, on a $A_{1,1} = \dfrac{1}{2} \notin \{0,1\}$.

8) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $(A,B) \in \mathcal{B}_n^2$, $\lambda \in]0,1[$, et supposons que $M_\sigma = \lambda A + (1-\lambda)B$. Fixons $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

- si $i = \sigma(j)$ on a $1 = \lambda A_{i,j} + (1-\lambda)B_{i,j}$. Or nous avons vu que A et B étaient à coefficients dans $[0,1]$. Si $A_{i,j} < 1$ ou $B_{i,j} < 1$ alors $\lambda A_{i,j} + (1-\lambda)B_{i,j} < \lambda + (1-\lambda)$. Donc nécessairement on a $A_{i,j} = B_{i,j} = 1$
- si $i = \sigma(j)$ on a $1 = \lambda A_{i,j} + (1-\lambda)B_{i,j}$. Si $A_{i,j} > 0$ ou $B_{i,j} > 0$ alors $\lambda A_{i,j} + (1-\lambda)B_{i,j} > 0$. Donc nécessairement on a $A_{i,j} = B_{i,j} = 0$

Finalement on a $\boxed{M_\sigma = A = B}$.

9) On rappelle encore une fois que tous les coefficients de A appartiennent à $[0,1]$. Notons :

$$X = \{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 / A_{i,j} \in]0,1[\}$$

Attention à une coquille dans l'énoncé : il fallait lire $r \geq 2$ et non pas $r \geq 1$ (sans quoi le résultat est immédiat et ne présente guère d'intérêt).

- premier point : soit $(i,j) \in X$
  - supposons que $\forall k \in [\![1,n]\!] \backslash \{j\},\ A_{i,k} = 0$. Alors on aurait $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} = A_{i,j} \neq 1$, absurde. On peut donc choisir $j' \neq j$ tel que $A_{i,j'} > 0$.
  - supposons qu'on ait $A_{i,j'} = 1$. Alors on aurait $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} \geq A_{i,j} + A_{i,j'} > 1$, absurde. Donc on a $A_{i,j'} \in]0,1[$.
  - on construit ainsi une fonction $h : (i,j) \mapsto (i,j')$ (comme "horizontal") de X dans X symétriquement, on construit une fonction $v : (i,j) \mapsto (i',j)$ (comme "vertical"), qui à tout couple $(i,j) \in X$ associe un couple $(i',j) \in X$ avec $i' \neq i$.
- deuxième point : X est non vide
  En effet, supposons par l'absurde que X soit vide et soit $j \in [\![1,n]\!]$. Puisque tous les coefficients de A seraient égaux à 0 ou 1 et puisque $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A_{i,j} = 1$, la j-ème colonne de A contiendrait un et un seul terme égal à 1. Cela permettrait de définir une application $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_{i,j} = \delta_{\sigma(j),j}$$

  De plus σ serait injective, sans quoi on pourrait trouver $j \neq j'$ tels que $\sigma(j) = \sigma(j')$, après quoi on aurait $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{\sigma(j),k} \geq 2$. Donc par comparaison de cardinaux, σ serait bijective si bien qu'on aurait $A = M_\sigma$, ce qui est exclu.

- troisième point : définissons par récurrence une suite $(i_k, j_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ à valeurs dans X de la manière suivante :
  - initialisation : puisque X est non vide, on peut choisir $(i_1, j_1) \in X$
  - hérédité : soit $k \geq 1$ et supposons avoir construit (i_k, j_k). On pose alors
$$(i_{k+1}, j_{k+1}) = (v \circ h)[(i_k, j_k)]$$

  Par construction, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ on a comme demandé : $(i_k, j_k) \in X$ et $(i_k, j_{k+1}) \in X$.
- quatrième point : $[\![1, n]\!]$ est fini donc par le principe des tiroirs, il existe deux entiers $k < l$ tels que $i_k = i_l$. *A fortiori*, il existe deux entiers $k < l$ tels que ($i_k = i_l$ ou $j_k = j_l$). Choisissons-les tels que $l - k$ soit minimal. Puis quitte à tronquer la suite, supposons que $k = 1$. Enfin, posons $r = l - 1$ et montrons que $i_1, \ldots, i_r$ et $j_1, \ldots, j_r$ ainsi définis conviennent (ou peu s'en faut).
  - on ne peut pas avoir $r = 1$, car par construction on a $i_1 \neq i_2$ et $j_1 \neq j_2$
  - toujours par construction, $i_1, \ldots, i_r$ sont bien deux à deux distincts ; de même avec $j_1, \ldots, j_r$.
  - il reste à vérifier que $(i_r, j_1) \in X$. Par hypothèse on a $i_{r+1} = i_1$ ou $j_{r+1} = j_1$, et on a aussi $(i_r, j_{r+1}) \in X$. Puis :
    - si $j_{r+1} = j_1$ c'est terminé
    - si $i_{r+1} = i_1$, remplaçons j_1 par j_{r+1} ce qui permet de se ramener au premier cas. Pour conclure, il reste à remarquer que par minimalité de $l - k = r$, l'entier j_{r+1} est bien distinct de $j_2, \ldots, j_r$.

10) Utilisons la matrice B de l'énoncé. Déjà, notons que B est bien définie et n'est pas la matrice nulle (c'est ici qu'intervient l'hypothèse $r \geq 2$). Ensuite, posons :
$$\varepsilon = \min(A_{i_1,j_1}, \ldots, A_{i_r,j_r}, A_{i_1,j_2}, \ldots, A_{i_r,j_{r+1}}) > 0$$

Quel que soit $\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, la matrice $A + \lambda B$ est à coefficients dans $\mathbb{R}^+$. Si on peut montrer qu'elle est bistochastique, cela suffira à conclure puisque A sera le milieu du segment $[A - \varepsilon B, A + \varepsilon B]$ et puisque ce segment n'est pas réduit à un point.

Par linéarité de la somme, il suffit de montrer que les lignes et les colonnes de B ont des sommes nulles :

- soit $i \in [\![1, n]\!]$ et montrons que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} B_{i,j} = 0$

  si i est égal à un certain i_k avec $k \in [\![1, r]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} B_{i,j} = B_{i_k,j_k} + B_{i_k,j_{k+1}} = 0$

  sinon la ligne est entièrement nulle
- soit $j \in [\![1, n]\!]$ et montrons que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} B_{i,j} = 0$
  - si j est égal à un certain j_k avec $k \in [\![2, r+1]\!]$, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} B_{i,j} = B_{i_k,j_k} + B_{i_{k-1},j_k} = 0$
  - sinon la colonne est entièrement nulle

On en déduit qu'une matrice de $\mathcal{B}_n$ est extrémale ssi c'est une matrice de permutation.

11) Utilisons le résultat admis ; soit donc $p, q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $p + q = n + 1$, choisissons une sous-matrice A' quelconque de taille (p, q), et par l'absurde supposons que $A' = 0$.

Quitte à échanger les lignes de A, supposons que les p lignes de A' correspondent aux p premières lignes de A. De même, supposons que les q colonnes de A' correspondent aux q premières colonnes de A. On a :
$$\forall j \in [\![1, q]\!], \quad \sum_{i=p+1}^{n} A_{i,j} = 1$$

En sommant ces égalités et en intervertissant les sommes on obtient :
$$\sum_{i=p+1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{q} A_{i,j} \right) = q.$$

Or : $\forall i \in [\![p+1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} A_{i,j} \leq \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} = 1$. Finalement on obtient : $q \leq n - p$, d'où contradiction.

12) • supposons que $\lambda_0 = 1$. Alors on aurait nécessairement : $\forall j \in [\![1,n]\!],\ A_{\sigma(j),j} = 1$. Ainsi, par le même raisonnement qu'en 9) (deuxième point), on en déduirait que $A = M_\sigma$, ce qui est exclu. Donc $\lambda_0 < 1$, et A_0 est bien définie.

- puisque $\lambda_0 < 1$, pour montrer que A_0 est à coefficients dans $\mathbb{R}^+$ il suffit de montrer que $A - \lambda_0 M_\sigma$ est à coefficients dans $\mathbb{R}^+$. Soit donc $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
  - si $i = \sigma(j)$ alors $A_{i,j} - \lambda_0 (M_\sigma)_{i,j} = A_{\sigma(j),j} - \lambda_0 \geq 0$
  - sinon alors $A_{i,j} - \lambda_0 (M_\sigma)_{i,j} = A_{i,j} \geq 0$
- par linéarité de la somme, on remarque que chaque ligne et chaque colonne de A_0 a pour somme :

$$\frac{1}{1-\lambda_0} \times (1 - \lambda_0 \times 1) = 1.$$

  Donc A_0 est bistochastique.
- soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $A_{i,j} = 0$. Alors nécessairement $i \neq \sigma(j)$, donc $(M_\sigma)_{i,j} = 0$ puis $(A_0)_{i,j} = 0$. Donc A_0 contient au moins autant de coefficients nuls que A. De plus, λ_0 est atteint en un certain j_0 : $\lambda_0 = A_{\sigma(j_0),j_0}$. On a alors :

$$A_{\sigma(j_0),j_0} - \lambda_0 (M_\sigma)_{\sigma(j_0),j_0} = 0$$

  donc $(A_0)_{\sigma(j_0),j_0} = 0$.
  Comme enfin $A_{\sigma(j_0),j_0} > 0$, A_0 contient au moins un coefficient nul de plus que A.

13) Pour cette question, il est plus commode de supprimer l'hypothèse que A n'est pas une matrice de permutation. On suppose donc seulement que $A \in \mathcal{B}_n$ et on raisonne par récurrence forte sur le nombre k de coefficients non nuls de A.

- initialisation : si $k \leq n$, notons que A admet au moins un coefficient non nul par colonne (puisque la somme de chaque colonne vaut 1). Et sur une colonne donnée, il ne peut pas y avoir deux coefficients non nuls sans quoi on aurait $k \geq n+1$. Donc il y en a un seul et il est nécessairement égal à 1. Toujours par le même raisonnement, on en conclut que A est une matrice de permutation, ce qui achève l'initialisation.
- hérédité : soit $k > n$, et supposons que l'hypothèse de récurrence est vérifiée à tous les rangs strictement inférieurs à k. Puisque $k \neq n$, A n'est pas une matrice de permutation. On peut donc construire :

$$A_0 = \frac{1}{1-\lambda_0}(A - \lambda_0 M_\sigma)$$

  comme dans la question précédente. Par hypothèse de récurrence, elle peut s'écrire :

$$A_0 = \tilde{\lambda}_0 \widetilde{M}_0 + \ldots + \tilde{\lambda}_s \widetilde{M}_s$$

  avec $\tilde{\lambda}_0, \ldots, \tilde{\lambda}_s > 0$ et $\tilde{\lambda}_0 + \ldots + \tilde{\lambda}_s = 1$. On a ensuite :

$$A = \lambda_0 M_\sigma + (1-\lambda_0)\tilde{\lambda}_0 \widetilde{M}_0 + \ldots + (1-\lambda_0)\tilde{\lambda}_s \widetilde{M}_s$$

  Il suffit alors de poser :

$$\begin{cases} M_0 = M_\sigma \\ \forall i \in [\![1,s+1]\!],\ M_i = \widetilde{M}_{i-1} \\ \forall i \in [\![1,s+1]\!],\ \lambda_i = (1-\lambda_0)\tilde{\lambda}_{i-1} \end{cases}$$

  Puisque $0 < \lambda_0 < 1$ les différents λ_i sont bien strictement positifs, et leur somme vaut bien 1.

14) • Puisque $\mathcal{P}_n$ est fini (et non vide), $\inf_{M \in \mathcal{P}_n} \varphi(M)$ existe et c'est même un minimum. Notons-le m.

- Soit $A \in \mathcal{B}_n$ et montrons que $\varphi(A) \geq m$.
  - si $A \in \mathcal{P}_n$ c'est par définition de m.
  - sinon, par la question précédente on peut écrire : $\varphi(M) = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i \varphi(M_i) \geq \sum_{i=0}^{s} \lambda_i m = m$
- On en déduit que $\inf_{M \in \mathcal{B}_n} \varphi(M)$ existe, que c'est un minimum et qu'il vaut m. De plus, il est effectivement atteint en une matrice de permutation (par définition de m)