2021-2022 **Devoir surveillé 1** PSI

**Correction**

## Exercice 1

**1.** Il est facile de voir que le vecteur (0,0,0) appartient à $F$ et à $G$. Donc $F$ et $G$ sont non vides. Soient $(x,x,x),(y,y,y) \in F$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$(x,x,x)+\alpha(y,y,y)=(x+\alpha y, x+\alpha y, x+\alpha y) \in F$$

Donc $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Soient $(0,y,z),(0,y',z') \in G$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(0,y,z)+\alpha(0,y',z')=(0,y+\alpha y', z+\alpha z') \in G$$

Donc $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On voit que :

$$F=\big\{x(1,1,1) \,/\, x \in \mathbb{R}\big\} \;=\; \mathrm{vect}\{(1,1,1)\}$$

$$G=\big\{y(0,1,0)+z(0,0,1) \,/\, x,y \in \mathbb{R}\big\} \;=\; \mathrm{vect}\{(0,1,0),(0,0,1)\}$$

De plus, on vérifie facilement que les familles $\{(1,1,1)\}$ et $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$ sont libres. Elles forment donc des bases respectives de $F$ et $G$. On en déduit que $\dim(F)=1$ et $\dim(G)=2$. Enfin, si $(x,y,z) \in F \cap G$, alors $x=y=z$ et $x=0$. Donc $F \cap G=\{(0,0,0)\}$, et $F$ et $G$ sont en somme directe.

**2.** On vérifie facilement que $(0,0,0,0) \in H$, de sorte que $F \neq \emptyset$. Soient $(x,y,z,t)$, $(x',y',z',t') \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, $(x,y,z,t)+\alpha(x',y',z',t')=(x+\alpha x', y+\alpha y', z+\alpha z', t+\alpha t')$ satisfait :

$$\begin{array}{lclcl} x+\alpha x' &=& 2y-z+\alpha(2y'-z') &=& 2(y+\alpha')-(z+\alpha z') \\ t+\alpha t' &=& x+y+z+\alpha(x'+y'+z') &=& (x+\alpha x')+(y+\alpha y')+(z+\alpha z') \end{array}$$

ce qui montre que $(x,y,z,t)+\alpha(x',y',z',t') \in H$. Donc $H$ est un sous-espace vectoriel de $R^4$. De plus,

$$\begin{array}{rcl} H &=& \big\{(2y-z,y,z,x+y+z) \,/\, x,y,z \in \mathbb{R}\big\} \\ &=& \big\{x(0,0,0,1)+y(2,1,0,1)+z(-1,0,1,1) \,/\, x,y,z \in \mathbb{R}\big\} \\ &=& \mathrm{vect}\big\{(0,0,0,1),(2,1,0,1),(-1,0,1,1)\big\} \end{array}$$

Montrons que la famille est libre. Considérons l'équation vectorielle

$$\alpha(0,0,0,1)+\beta(2,1,0,1)+\gamma(-1,0,1,1) \;=\; (0,0,0,0)$$

équation équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 &=& 2\beta-\gamma \\ 0 &=& 2\beta \\ 0 &=& \gamma \\ 0 &=& \alpha+\beta+\gamma \end{array}\right.$$

dont l'unique solution est $\alpha=\beta=\gamma=0$. La famille $\{(0,0,0,1),(2,1,0,1),(-1,0,1,1)\}$ est donc libre, et c'est une base de $H$.

## Exercice 2

**1.** La matrice de $f$ dans la base $\beta$ est :

$$[f]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**2.** La matrice associée à la famille $\beta'$ dans la base $\beta$ est :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice est inversible car son déterminant est non nul (il vaut -2). La famille $\beta'$ est donc une base et la matrice de changement de base est $P$.

**3.** Calculons $f(e_1')$ et $f(e_2')$ :

$$\begin{cases} f(e_1') = f(e_1) + f(e_2) = 2e_2 = e_1' - e_2' \\ f(e_2') = f(e_1) - f(e_2) = 2(e_1 - e_2) = 2e_2' \end{cases}$$

On peut ainsi en déduire la matrice de $f$ dans la base $\beta'$ :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

**4.** Après calcul on trouve :

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Puis, en utilisant la formule de changement de base, on obtient :

$$B = P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

## Exercice

$E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\mathcal{B} = \left(1, X, \ldots, X^{n-1}\right)$ sa base canonique, $a_1, \ldots, a_n$, $n$ réels vérifiant : $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

1. Soit l'application : $T : P \mapsto (P(a_1), \ldots, P(a_n))$.

— Linéarité. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, les applications $E \to \mathbb{R}, P \mapsto P(\alpha)$ sont des formes linéaires. Ainsi $T$ est une application linéaire de $E$ vers $\mathbb{R}^n$.

— Injectivité. Soit $P \in \ker(T)$. On a $T(P) = 0$ donc $(P(a_1), \ldots, P(a_n)) = (0, 0, \ldots, 0)$ et donc $P$ s'annule en au moins $n$ réels distincts : les $a_k$. Ainsi $P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ s'annule en au moins $n$ points distincts, donc c'est le polynôme nul. On en déduit donc que $\ker(T) \subset \{0_E\}$.
Par ailleurs, $\ker(T)$ est un sous-espace vectoriel de $E$ donc on a l'inclusion réciproque. Donc $\ker(T) = \{0_E\}$ donc par caractérisation de l'injectivité des applications linéaires, $T$ **est injective**.

— Bijectivité. On a $\dim(E) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$. Donc comme $T$ est une application injective de $E$ vers $\mathbb{R}^n$, on a par caractérisation des isomorphismes en dimension finie,
$\boxed{T \text{ est un isomorphisme de } E \text{ vers } \mathbb{R}^n}$

2. $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $L_i = T^{-1}(e_i)$ et $\mathcal{B}' = (L_1, \ldots, L_n)$.
$T$ est un isomorphisme de $E$ vers $\mathbb{R}^n$ donc sa bijection réciproque, $T^{-1}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vers $E$. Or $\mathcal{B}'$ est l'image de $\mathcal{E}$ par $T^{-1}$. Comme l'image par un isomorphisme d'une base de l'espace de départ est une base de l'espace d'arrivée , on en déduit que $\boxed{\mathcal{B}' = (L_1, \ldots, L_n) \text{ est une base de } E}$.
Soit $P \in E$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$. On a $P = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k$. On évalue cette relation en $a_j$, sachant que comme $L_i = T^{-1}(a_j) = 1$ si $i = j$ et 0 si $i \neq j$. On obtient alors $P(a_j) = \lambda_j$ ce qui donne la coordonnée selon $L_k$ de $P$ dans la base $\mathcal{B}'$. Ainsi $\boxed{P = \sum_{k=1}^{n} P(a_k) L_k}$
.
On note $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$

3. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.
   (a) Comme les $L_k$ sont de degré $\leq n-1$, s'annulent en les $a_j$ pour $j \neq k$ et valent 1 en$a_k$, on trouve :
$$\begin{array}{lclcl} L_1 & = & \dfrac{(X-1)(X-2)}{2} & = & 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2 \\ L_2 & = & -X(2-X) & = & 0 + 2X - X^2 \\ L_3 & = & \dfrac{X(X-1)}{2} & = & 0 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2 \end{array}$$
   On en déduit la matrice de $(L_1, L_2, L_3)$ dans $(1, X, X^2)$ :
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$
   (b) $M - I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 (une ligne nulle donc matrice non inversible et deux premières colonnes non colinéaires donc rang supérieur ou égal à 2). Ainsi $\boxed{1 \text{ est une valeur propre de } M}$.
   De plus on remarque que dans cette matrice $M - I_3$, la somme des deux premières colonnes donne la troisième, ce qui signifie que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau de $M - I_3$ donc il est dans le sous-espace propre $E_1(M)$ de $M$ relatif à la valeur propre 1. Or, comme le rang de $M - I_3$ vaut 2, la dimension de $E_1(M)$ vaut 1. Donc $\boxed{E_1(M) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$
   (c) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On l'écrit sous la forme $P = a + bX + cX^2$. Comme $M$ est la matrice de $T^{-1}$ dans les bases $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ et B de $\mathbb{R}[X]$, on a :
   $P = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 \iff T(P) = (a, b, c) \iff P = T^{-1}(a, b, c) \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ainsi $P = P(0) + P(1)X + P(2)X^2 \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \ker(M - I_3) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi les polynômes $P$ de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$ sont les polynômes :
$\boxed{\lambda\left(1 + X - X^2\right) \text{ lorsque } \lambda \text{ décrit } \mathbb{R}}$

4. **On revient au cas général**.
   (a) $\boxed{M \text{ est la matrice de passage d'une base vers une autre donc } M \text{ est inversible}}$.
   $M^{-1}$ est la matrice de $T$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{E}$. Or :
   $T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(X) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $T\left(X^2\right) = \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ \vdots \\ a_n^2 \end{pmatrix}$, $\ldots$, $T\left(X^{n-1}\right) = \begin{pmatrix} a_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} \\ \vdots \\ a_n^{n-1} \end{pmatrix}$. Ainsi on obtient
   $$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}}$$
   (b) On utilise l'expression obtenue à la question **??** avec le polynôme constant égal à 1. On obtient $1 = \sum_{i=1}^n 1\left(a_i\right) L_i$ donc $\boxed{\sum_{i=1}^n L_i = 1}$.
   (c) Par définition de $M$, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $L_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} X^{i-1}$. Ainsi :
   $1 = \sum_{j=1}^n L_j = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{i,j}\right) X^{i-1}$ .
   En particulier, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la somme $\sum_{j=1}^n m_{i,j}$ représente le coefficient en $X^{i-1}$ du polynôme $\sum_{j=1}^n L_j = 1$. Donc $\boxed{\sum_{j=1}^n m_{1,j} = 1 \text{ et, si } i \in [\![2, n]\!],\ \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 0}$.
   <u>Remarque</u> : On pouvait aussi constater que ces sommes $\sum_{j=1}^n m_{i,j}$ correspondaient aux coefficients de la première colonne de la matrice produit de $M$ par $M^{-1}$ car la première colonne de $M^{-1}$ n'est constituée que de 1.
   (d) On reprend l'expression $L_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} X^{i-1}$. On a alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^n m_{i,j} = L_j(1) = L_j\left(a_1\right)$ ici car $a_1 = 1$. Ainsi $\boxed{\sum_{i=1}^n m_{i,1} = 1 \text{ et, si } j \in [\![2, n]\!],\ \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 0}$.
   <u>Remarque</u> On pouvait aussi constater que ces sommes $\sum_{i=1}^n m_{i,j}$ correspondaient aux coefficients de la première ligne de la matrice produit de $M^{-1}$ par $M$ car la première ligne de $M^{-1}$ n'est constituée que de 1 car $a_1 = 1$.

5. $n \geq 4$, $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2$ et $u$ l'endomorphisme de $E$ défini par : $u(P) = P(0)L_1 + P(1)L_2 + P(2)L_3$
   (a) — <u>Noyau</u>. Soit $P \in E$. $P \in \ker(u) \Longleftrightarrow P(0) = P(1) = P(2) = 0$ car $\left(L_1, L_2, L_3\right)$ est libre. Ainsi :
   $$\ker(u) = \left\{X(X-1)(X-2)Q \middle| Q \in \mathbb{R}_{n-4}[X]\right\}$$
   — <u>Image</u>. D'après le théorème du rang, $\Im(u)$ est de dimension $\dim(E) - \dim(\ker(u)) = 3$. Or on a clairement $\Im(u) \subset \operatorname{vect}\left(L_1, L_2, L_3\right)$ qui est de dimension 3 car $\left(L_1, L_2, L_3\right)$ est libre. Ainsi $\boxed{\Im(u) = \operatorname{vect}\left(L_1, L_2, L_3\right)}$
   — <u>Supplémentaires</u>. Soit $P \in \ker(u) \cap \Im(u)$. Il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = aL_1 + bL_2 + cL_3$. En évaluant en $0, 1$ et $2$, on trouve respectivement $a = 0, b = 0, c = 0$. Donc $P = 0_E$ : $\Im(u)$ et $\ker(u)$ sont en somme directe. Mais comme la somme de leurs dimensions est $\dim(E)$ par le théorème du rang, on en déduit que $\operatorname{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont supplémentaires dans $E$