PSI

Correction devoir surveillé n^{o}1

Devoir maison - correction

1. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{2}$ sont respectivement racines des polynômes X^2-2, X^2-3 et X^4-2. Ce sont donc des nombres algébriques

2. Si $q \in \mathbb{Q}$ alors q est racine de $X-q$.

3. Si P est un polynôme annulateur non nul de x alors $P(X^2)$ est un polynôme annulateur non nul de $\sqrt{x}$.

4. L'ensemble $\mathcal{D}$ est non vide. En effet, puisque a est algébrique, il existe un polynôme annulateur non nul. Donc d'après l'axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{D}$ admet un minimum.

5. D'après la question précédente, il existe un polynôme P de $\mathcal{P}$ de degré n. Posons $\mu = \frac{1}{c}P$ oú c est le coefficient dominant de P. Comme $P(a) = 0$, on a aussi $\mu(a) = 0$; μ est donc dans $\mathcal{P}$ de coefficient dominant 1. Pour l'unicité, choisissons deux polynômes unitaires P_1 et P_2 de $\mathcal{P}$ ayant un degré égal à n. Effectuons la division euclidienne de P_1 par P_2. On obtient :

$$P_1 = QP_2 + R$$

Puis en appliquant a, on obtient $R(a) = 0$. Ainsi R est un polynôme annulateur de a. S'il est non nul son degré est dans $\mathcal{D}$ et est donc plus grand ou égal à n, ce qui est absurde ; donc $R = 0$ et $P_1 = QP_2$. En appliquant le degré à cette équation, on trouve que $deg(Q) = 0$ et en regardant les coefficients dominants, on trouve $Q = 1$.

6. L'ensemble (μ) est non vide puisqu'il contient μ, il est bien inclus dans $\mathbb{Q}[X]$ par définition. Il reste à voir la stabilité par combinaison linéaire. Soit λ_1, λ_2 dans $\mathbb{Q}$ et $P_1\mu$, $P_2\mu$ dans (μ), alors :

$$\lambda_1 P_1\mu + \lambda_2 P_2\mu = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)\mu \;\; \in \;\; (\mu)$$

7. Montrons tout d'abord que $(\mu) \subset \mathcal{P}$. Soit $P\mu$ dans (μ) alors $(P\mu)(a) = P(a).\mu(a) = 0$. Donc $P\mu$ est bien dans $\mathcal{P}$.

Réciproquement, montrons que $\mathcal{P} \subset (\mu)$. Pour cela considérons P un polynôme annulateur de a et effectuons la division euclidienne de P par μ : il existe donc Q dans $\mathbb{Q}[X]$ et R dans $\mathbb{Q}_{n-1}[X]$ tels que $P = Q\mu + R$. En appliquant a, on obtient $R(a) = 0$. Comme dans la question précédente, on en déduit que $R = 0$ et donc que P est un multiple de μ.

8. Tout d'abord de manière évidente $1 \in L$ et L est stable par différence.

Montrons que L est stable par produit. Soient $x_1 + y_1\sqrt{2}$ et $x_2 + y_2\sqrt{2}$ dans L, alors :

$$(x_1 + y_1\sqrt{2}) \times (x_2 + y_2\sqrt{2}) = (x_1x_2 + 2y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2} \in L$$

Montrons que L est stable par inverse. Soient $x + y\sqrt{2}$ dans L non nul :

$$\frac{1}{x+y\sqrt{2}} = \frac{x - y\sqrt{2}}{(x+y\sqrt{2})(x-y\sqrt{2})} = \left(\frac{x}{x^2-2y^2}\right) + \left(\frac{-y}{x^2-2y^2}\right)\sqrt{2} \in L$$

9. Soit L un sous-corps de $\mathbb{R}$. Montrons tout d'abord par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ n \in L$$

Pour l'initialisation, $1 \in L$ et $0 = 1 - 1 \in L$ car L est stable par différence. Supposons que pour n fixé dans $\mathbb{N}$ on ait $n \in L$. Comme 0 et 1 sont dans L, alors $-1 = 0 - 1$ est encore dans L. Enfin :

$$n + 1 \ = \ n - (-1) \ \in L$$

La propriété est donc vérifiée pour tout n de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \subset L$.

De plus pour tout n de $\mathbb{N}$: $-n \ = \ 0 - n \ \in L$ par différence d'élément de L. Ainsi $\mathbb{Z} \in L$. Enfin pour toute fraction $\frac{p}{q}$ de $\mathbb{Q}$, on a :

$$\frac{p}{q} \ = \ p \times \frac{1}{q} \ \in \ L$$

par stabilité par inverse et produit. On a donc $\mathbb{Q} \subset L$.

10. $K(a)$ est non vide puisqu'il contient 1 (le polynôme 1 appliqué à a). De plus il est inclus dans $\mathbb{R}$ par définition. Par ailleurs, si $P_1(a)$ et $P_2(a)$ sont dans $K(a)$, alors

$$\lambda_1 P_1(a) + \lambda_2 P_2(a) \ = \ (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(a) \ \in K(a)$$

puisque :

$$deg(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) \leq Max(deg(P_1), deg(P_2)) \leq n - 1$$

Ainsi, d'après le théorème de caractérisation, $K(a)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

11. On effectue la division euclidienne de $P_1 P_1$ par μ, on obtient : $P_1 P_2 = A\mu + Q$. En appliquant a, on obtient $P_1(a)P_2(a) = Q(a)$ où Q est bien de degré inférieur ou égal à $n-1$ puisque c'est le reste de la division euclidienne par μ. Ainsi $K(a)$ est bien stable par produit.

12. Tout d'abord, montrons que la famille est libre. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ dans K tels que :

$$\lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \ldots + \lambda_{n-1} a^{n-1} = 0$$

Posons $P = \lambda_0 + \ldots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$, on a donc $P(a) = 0$. Ainsi P est un polynôme annulateur de a, c'est donc un multiple de μ. Cependant $deg(\mu) = n$ et $deg(P) \leq n - 1$; on a donc forcément $P = 0$.

De plus la famille est génératrice puis si b est dans $K(a)$, il existe un polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \ldots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$ tel que $b = P(a) = \lambda_0 + \lambda_1 a + \ldots + \lambda_{n-1} a^{n-1}$

13. Tout d'abord ϕ est clairement une application linéaire puisque pour tout λ_1, λ_2 dans K et x_1, x_2 dans $K(a)$, on a :

$$\phi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ = \ b(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ = \ \lambda_1 b x_1 + \lambda_2 b x_2 \ = \ \lambda_1 \phi(x_1) + \lambda_1 \phi(x_2)$$

De plus ϕ est injective puisque son noyau est réduit à $\{0\}$. En effet :

$$\phi(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad bx = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Enfin l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont de même dimension finie, donc ϕ est automatiquement surjective.

14. Comme ϕ est bijective, 1 doit avoir un antécédent. Il existe donc c dans $K(a)$ tel que $bc = 1$. Comme le produit est commutatif, on a aussi $cb = 1$. Ainsi b est inversible et $K(a)$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

15. Soit L un corps contenant K et a. Puisque L est stable par produit, il contient aussi 1, a, $\dots$, a^n. De plus, on peut le considéré comme un K-espace vectoriel, il est donc stable par combinaison linéaire. Ainsi pour tout polynôme P, on a $P(a)$ dans L et donc $K(a)$ est inclus dans L. Tout sous-corps contenant K et a contient également $K(a)$; le corps $K(a)$ est donc le plus petit corps contenant à la fois K et a.

16. Montrons tout d'abord que la famille est libre. Pour considérons l'expression :

$$0 \;=\; \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\lambda_{ij}e_i f_j \;=\; \sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}e_i\right) f_j$$

Comme la famille (f_j) est libre, on a pour tout j de $\{1,\dots,q\}$:

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}e_i \;=\; 0$$

On utilise ensuite que la famille (e_i) est libre et on obtient $\lambda_{ij}=0$ pour tous i, j convenables.

Montrons ensuite que la famille est génératrice. Soit x dans K_2, décomposons-le dans la base (f_j) : $x \;=\; \displaystyle\sum_{j=1}^{q}\alpha_j f_j$. Puis décomposons chaque α_j de K_1 dans la base (e_i). On obtient :

$$x \;=\; \sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}e_i\right) f_j \;=\; \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\lambda_{ij}e_i f_j$$

17. On utilise la question précédente avec $K_1=\mathbb{Q}$, $K_2=\mathbb{Q}(a_1)$ et $K_3=\mathbb{Q}(a_1,a_2)$.

18. Ce sont des familles ayant plus de vecteurs que la dimensions de l'espace, elles sont donc liées. Il existe ainsi des polynômes P_1 et P_2 de $\mathbb{Q}[X]$ non nuls tels que $P_1(a_1+a_2)=0$ et $P_2(a_1a_2)=0$

19. L'ensemble $\mathcal{A}$ est stable par $+$ et $\times$ d'après la question précédente et il contient 1.

Montrons que $\mathcal{A}$ est stable par opposé. Soit a un nombre algébrique et P un polynôme annulateur de a. Alors $Q=P(-X)$ est un polynôme annulateur de $-a$ et $-a$ est algébrique.

Montrons que $\mathcal{A}$ est stable par inverse. Soit a un nombre algébrique non nul et P un polynôme annulateur de a de degré n. Alors $Q = X^nP\left(\frac{1}{X}\right))$ est un polynôme annulateur de a^{-1} et a^{-1} est algébrique.

Ainsi par définition, $\mathcal{A}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.