

" Il vaut mieux mobiliser son intelligence sur des conneries
 " plutôt que sa connerie sur des choses intelligentes

Teddy et Adrien

PROBLÈME 1

Dans ce problème, on détermine dans la **Partie I** la valeur de la transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal. On utilise ensuite dans la **Partie II** une variante de la formule de Viète pour exprimer la transformée de Laplace de la **Partie I** comme limite d'une suite d'intégrales.

Partie I - Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt \text{ et } H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(t) dt.$$

Q1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, |\sin(t)| \leq t$.

Q2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

Q3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Q4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G .

Q5. Trouver une expression simple pour G et pour H . *On pourra calculer $H(x) + iG(x)$.*

En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \cos(\alpha t) dt$.

Q6. En déduire une expression simple pour F . Que vaut $F(1)$?

Partie II - Autour de la formule de Viète

Q7. Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: **Erreur d'énoncé : il faut supposer $t \neq 0$** $[2\pi]$.

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^n \sin(t/2^n)}.$$

Q8. Montrer que pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^n - 1} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n} t\right).$$

On pourra raisonner par récurrence et utiliser l'identité :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)).$$

Q9. En déduire que pour tout $t > 0$: **Même problème que Q7.**

$$\frac{\sin(t)}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right).$$

Q10. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-tx} dt.$$

On pourra introduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, f_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \cos\left(\frac{2k-1}{2^n}t\right) e^{-tx}.$$

Q11. En déduire que :

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}}.$$

L'objet des trois questions suivantes est de redémontrer le résultat précédent de façon plus élémentaire.

Q12. Déterminer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

en écrivant cette quantité à l'aide d'une somme de Riemann.

Q13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, 2^{n-1} \rrbracket$:

$$\left| \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right| \leq \frac{4 \times 2^{n-1} + 1}{1 + 2^{2n}} \times \frac{1}{4k^2 + 2^{2n}}$$

Q14. En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n+1} \sum_{k=0}^{2^{n-1}} \left(\frac{1}{4k^2 + 2^{2n}} - \frac{1}{(2k-1)^2 + 2^{2n}} \right) = 0$$

et retrouver le résultat de la question **Q11**.

PROBLÈME 2

Les matrices de Kac

Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de \mathbb{R}^n seront notés en colonnes.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.
On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ introduites par Mark Kac au milieu du XX^e siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Eric Kostlan au début des années 2000.

Ce problème est divisé en quatre parties largement indépendantes. La **Partie I** introduit les matrices de Kac en taille 3 et met en évidence les propriétés qui seront démontrées en taille quelconque dans les **Parties II et III**. La **Partie IV** est une utilisation probabiliste d'une des deux matrices de Kac.

Partie I - La dimension 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q15. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(XI_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Q16. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur \mathbb{R} . Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.*

Q17. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X) = i\chi_B(iX)$.

Q18. La matrice B est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} ? Est-elle diagonalisable sur \mathbb{C} ? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur \mathbb{R} et \mathbb{C} correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.*

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q19. Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B .

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q20. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur \mathbb{R} .

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le \mathbb{C} -espace vectoriel défini par :

$$V_n = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \mid (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

Q21. Montrer que la famille (f_0, f_1, \dots, f_n) est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n .

Q22. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer que $f'_k \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{aligned} \varphi_n : V_n &\longrightarrow V_n \\ f &\longmapsto \varphi_n(f) = f' \end{aligned}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base (f_0, f_1, \dots, f_n) est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

Q23. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.

Q24. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad g_k \in V_n$.

Q25. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer g'_k . En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

Q26. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

Q27. Écrire la décomposition de g_n dans la base (f_0, \dots, f_n) et en déduire que :

$$\ker(B_n - inI_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $q_k = i^{n-k} \binom{n}{k}$.

Partie III - Les matrices de Krac de taille $n + 1$

Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice A_n . On utilise les résultats de la **Partie II** pour étudier les propriétés spectrales de la matrice A_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général $a_{k,l}$ de la matrice A_n vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leq k \leq n$,
- $a_{k,k-1} = n - k + 2$ si $2 \leq k \leq n + 1$,
- $a_{k,l} = 0$ pour tous les couples $(k, l) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k -ième terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

- Q28.** Soient $M = (m_{kl})_{1 \leq k, l \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{kl})_{1 \leq k, l \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p . Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des m_{kl} et des d_{kl} , puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des m_{kl} et des d_{kl} .
- Q29.** Montrer que $D_n^{-1}A_nD_n = -iB_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation simple entre $\chi_{A_n}(X)$ et $\chi_{B_n}(iX)$, où χ_{A_n} et χ_{B_n} sont les polynômes caractéristiques respectifs de A_n et B_n .
- Q30.** En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que A_n est diagonalisable sur \mathbb{R} , que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k - n$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et que :

$$\ker(A_n - nI_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.

Partie IV - Un peu de probabilités

Objectifs

Dans cette **partie**, on donne une application probabiliste de l'étude de la matrice A_n . Seul le résultat de la question **Q30** est utilisé, cette partie peut être traitée en admettant si besoin ce résultat.

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n . On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1 .

À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. les choix successifs sont supposés indépendants.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k .

Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1, 3, 4 et l'urne U_2 la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.

- Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2 . On a alors $N_1 = 2$.
- Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1 . On a alors $N_1 = 4$.

Pour $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $E_{k,l}$ l'événement $(N_k = l)$ et $p_{k,l} = \mathbb{P}(E_{k,l})$ sa probabilité.

On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k .

Q31. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n})$?

Q32. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k , combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$?

Q33. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j, l \in \llbracket 0, n \rrbracket$, déterminer :

$$\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}).$$

On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.

Q34. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(E_{k,1}) \text{ et } \mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(E_{k,n-1})$$

et que :

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n} \mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n} \mathbb{P}(E_{k,j+1}).$$

Q35. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0$$

où A_n est la matrice introduite dans la **Partie III**.

On suppose jusqu'à la fin du Problème qu'à l'instant 0, on a disposé de façon équiprobable et indépendamment les unes des autres les n boules dans l'une des urnes U_1 ou U_2 .

Q36. Déterminer la loi π de N_0 .

Q37. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k a la même loi que N_0 . *On pourra utiliser la question Q30 de la Partie III.*

Q38. Démontrer que π est l'unique loi de probabilité ayant la propriété suivante : si N_0 suit la loi π , alors toutes les variables N_k suivent la loi π .

FIN