

" Il vaut mieux mobiliser son intelligence sur des conneries  
plutôt que sa connerie sur des choses intelligentes "

Teddy et Adrien

## Notations.

- On note  $\lfloor x \rfloor$  la partie entière du réel  $x$ .
- On se place dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni de son repère orthonormé canonique  $\mathcal{R}$ , d'origine  $O$ .

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes ; les parties II et III utilisent les notations  $R(z)$  et  $V_n(z)$  introduites dans la première partie.

## I. Première partie.

**I.A.** Soit  $z$  un nombre complexe, de partie réelle  $x$  et de partie imaginaire  $y$ , tels que  $(x, y) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}$ . On note

$$\theta(z) = 2 \arctan \left( \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad \text{et} \quad R(z) = \frac{z + |z|}{\sqrt{2(Re(z) + |z|)}}$$

**I.A.1** Justifier que  $\theta$  et  $R$  sont bien définis.

**I.A.2** Lorsque  $z$  vaut successivement  $z_1 = 4$ ,  $z_2 = 2i$ ,  $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$ , calculer  $R(z)$ ,  $\theta(z)$  et  $(R(z))^2$ .

**I.A.3** Vérifier que  $\theta(z) \in ]-\pi, \pi[$  et que  $R(z) \in \mathcal{P} = \{Z \in \mathbb{C} / Re(Z) > 0\}$ .

**I.A.4** Représenter sur une figure le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  de rayon  $|z|$  et les points  $M$  d'affixe  $z$  et  $B$  d'affixe  $-|z|$ .

En considérant des angles bien choisis, montrer que

$$\theta(z) = \text{Arg}(z) = 2\text{Arg}(z + |z|)$$

où  $\text{Arg}(z)$  désigne la détermination principale de l'argument du nombre complexe  $z$ .

**I.A.5** Déterminer  $(R(z))^2$ ,  $\theta \circ R(z)$  et  $|z|^{1/2} e^{i\theta(z)/2}$  en fonction de  $z$ ,  $R(z)$  et  $\theta(z)$ .

**I.A.6** Résoudre à l'aide de  $E$  l'équation  $Z^2 = z$ , d'inconnue  $Z \in \mathbb{C}$ .

**I.A.7** En déduire que  $R$  est une bijection de  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$  dans  $\mathcal{P}$ . Préciser sa bijection réciproque.

**Dans la suite du problème**, on prolonge  $R$  à  $\mathbb{C}$  en posant  $R(x) = i\sqrt{|x|}$  si  $x \in \mathbb{R}^-$ .

**I.B.** Soient  $a, b$  deux nombres complexes tels que  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

On dit qu'une suite complexe  $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie la relation de récurrence  $(E_{a,b})$  si l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2au_{n+1} + bu_n$$

**I.B.1** On suppose que  $a^2 + b \neq 0$ . On note  $d = R(a^2 + b)$ . On appelle  $W$  la suite  $W = ((a + d)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $W'$  la suite  $W' = ((a - d)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Montrer que  $U$  vérifie  $E_{a,b}$  si et seulement si  $U \in \text{Vect}(W, W')$ .

Déterminer  $U$  vérifiant  $E_{a,b}$  et les conditions initiales  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$  en fonction de  $d$ ,  $W$  et  $W'$ .

**I.B.2** On suppose que  $a^2 + b = 0$  et  $a \neq 0$ . On note  $W$  et  $W'$  les suites  $W = (a^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $W' = (na^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Montrer que  $U$  vérifie  $E_{a,b}$  si et seulement si  $U \in \text{Vect}(W, W')$ .

Déterminer  $U$  vérifiant  $E_{a,b}$  et les conditions initiales  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$  en fonction de  $a$ ,  $W$  et  $W'$ .

**Dans la suite du problème, on note :**

- $U(a, b) = (U_n(a, b))_{n \in \mathbb{N}}$  l'unique suite vérifiant  $E_{a,b}$  et les conditions initiales  $U_0(a, b) = 0$  et  $U_1(a, b) = 1$  ;
- $V_n(z) = U_{n+1}(z, -1)$  pour tous  $z \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

**I.B.3** Expliciter  $V_1(z)$ ,  $V_2(z)$  et  $V_3(z)$  et déterminer leurs racines dans  $\mathbb{C}$ .

**I.B.4** Montrer que, pour tous  $z \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$V_n(z) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-j}{j} (2z)^{n-2j} (-1)^j \quad (I.1)$$

## II. Deuxième partie.

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . On note  $C_z$  (respectivement  $\Omega_z$ ) l'ensemble des points du plan d'affixe complexe  $Z$  tels que  $|Z(Z - 2z)| = 1$  (respectivement  $|Z(Z - 2z)| < 1$ ).

**II.A.** Dans cette question, on suppose que  $z$  est un réel noté  $a$ .

On se place dans le repère orthonormé  $\mathcal{R}'$  de centre  $O'$  d'affixe  $a$ , déduit de  $\mathcal{R}$  par translation.

**II.A.1** Montrer qu'une équation de la courbe  $C_a$  en "coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$ " dans le repère  $\mathcal{R}'$  est

$$(\rho^2 + a^2)^2 - 4a^2 \rho^2 \cos^2(\theta) = 1$$

**II.A.2** Simplifier cette équation lorsque  $a = 1$ . Etudier et tracer l'allure de la courbe  $C_1$ .

**II.B.** On suppose à nouveau  $z$  complexe quelconque.

**II.B.1** Justifier que  $\Omega_z$  est une partie bornée du plan. Est-elle ouverte ? Fermée ? Compacte ?

**II.B.2** Justifier que l'origine  $O$  est un point intérieur à  $\Omega_z$ .

**II.C.** On reprend dans cette question la notation  $R$  introduite dans la première partie à la question

**I.A.**

**II.C.1** Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $z^2 \neq 1$ . On note

$$r = |R(z^2 - 1)|, \quad s = |z + R(z^2 - 1)|, \quad t = |z - R(z^2 - 1)|, \quad h = \max(s, t)$$

Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|V_n(z)| \leq \frac{h^{n+1}}{r}$ .

**II.C.2** Que dire du rayon de convergence de la série entière  $Z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(Z) Z^n$  ?

On note  $g_z$  sa somme.

**II.C.3** Lorsque cela a un sens, calculer  $(1 - 2zZ + Z^2)g_z(Z)$ .

**II.C.4** Déterminer l'ensemble de définition  $D_z$  de la fonction  $Z \mapsto \frac{1}{1-2zZ+Z^2}$ .

**II.C.5** Montrer qu'il existe un disque ouvert non vide  $\Delta$  de centre  $O$  inclus dans  $\Omega_z$  tel que

$$\forall Z \in \Delta, \quad \frac{1}{1 - 2zZ + Z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(z) Z^n = \sum_{p=0}^{+\infty} (Z^p (2z - Z)^p)$$

**II.C.6** En déduire que la fonction de la variable réelle  $x$

$$G_z : x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} (x^p (2z - x)^p)$$

admet un développement limité à tout ordre en 0. On le note

$$G_z(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n) \quad x \rightarrow 0$$

Déterminer les coefficients  $a_k$  pour  $k \in \mathbb{N}$ .

**II.C.7** Retrouver alors la relation (I.1).

### III. Troisième partie.

On note :

- $\alpha$  un réel tel que  $\alpha > -1/2$  ;
- $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonction de classe  $C^\infty$  sur  $[-1, 1]$  à valeurs réelles ;
- $F_n$  le sous-espace de  $E$  des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $n \in \mathbb{N}$  ;
- $\varphi_\alpha$  l'application qui à toute fonction  $y$  de  $E$  associe la fonction

$$\varphi_\alpha(y) : t \mapsto (1 - t^2)y''(t) - (2\alpha + 1)ty'(t)$$

- $S_\alpha$  l'application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$S_\alpha(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)(1 - t^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} dt$$

#### III.A.

**III.A.1** Vérifier que  $S_\alpha$  est un produit scalaire sur  $E$ .

**III.A.2** Justifier que  $\varphi_\alpha$  est un endomorphisme de  $E$ . Est-il injectif ?

**III.A.3** Montrer que

$$\forall (f, g) \in E^2, S_\alpha(\varphi_\alpha(f), g) = S_\alpha(f, \varphi_\alpha(g))$$

*On pourra calculer la dérivée de  $t \mapsto (1 - t^2)^{\alpha + \frac{1}{2}} f'(t)$ .*

**III.B.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

**III.B.1** Justifier que  $\varphi_\alpha$  induit sur  $F_n$  un endomorphisme et que cet endomorphisme induit (encore noté  $\varphi_\alpha$ ) est diagonalisable.

**III.B.2** Montrer qu'il existe une base de  $F_n$  constituée de vecteurs propres de  $\varphi_\alpha$  de degrés deux à deux distincts.

**III.B.3** Vérifier que deux vecteurs propres de  $\varphi_\alpha$  de degrés distincts sont associés à deux valeurs propres distinctes. *On pourra s'intéresser au coefficient dominant d'un polynôme judicieux.*

**III.B.4** Justifier que deux vecteurs propres de  $\varphi_\alpha$  de degrés distincts sont orthogonaux.

**III.B.5** Montrer que tout vecteur propre de  $\varphi_\alpha$  de degré supérieur ou égal à 1 s'annule au moins une fois dans l'intervalle  $] -1, 1[$ .

**III.C.** Dans cette partie, on suppose  $\alpha = 1$ . On note  $\|\cdot\|$  la norme associée à  $S_1$ .

**III.C.1** Justifier que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un unique polynôme vecteur propre de  $\varphi_1$  de degré  $k$ , de norme 1 et de coefficient dominant positif. On le note  $T_k$ .

**III.C.2** Soit  $t \in ]0, \pi[$ . Montrer que la fonction

$$H_t : x \mapsto \frac{1}{1 - 2x \cos(t) + x^2}$$

est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ .

**III.C.3** En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in ]0, \pi[, V_n(\cos(t)) = \frac{\sin((n+1)t)}{\sin(t)}$$

**III.C.4** En dérivant deux fois la fonction  $t \mapsto \sin(t)V_n(\cos(t)) - \sin((n+1)t)$ , montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n$  est vecteur propre de  $\varphi_1$ .

**III.C.5** En déduire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $V_n$  et  $T_n$  sont proportionnels. Expliciter le coefficient de proportionnalité.

**III.C.6** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer les racines de  $T_n$ .