2020-2021 | PSI

# Devoir surveillé 8

**Endomorphismes particuliers - Intégrales à paramètres - 4h**

" *Un con qui marche va plus loin qu'un intellectuel assis*

Teddy et Adrien

## Exercice 1.

Déterminer la limite de :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n} dt$$

## Exercice 2.

Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt = \frac{\pi^2}{6}$$

On pourra faire apparaitre une série géométrique.

## Exercice 3.

Soit $F$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que $F$ est dérivable et calculer $F'$.
2. Calculer $F(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
3. Posons $g(x) = F(x^2)$. Calculer $g'$ puis en déduire que :

$$g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2 dt}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

4. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**Exercice 4.**

Soit $n$ un entier supérieur à 2 et $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n$. On appelle projecteur de $E$, tout endomorphisme $p$ de $E$ vérifiant $p \circ p = p$.

**1.** Soit $p$ un projecteur de $E$.

**1.a** Démontrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}\,(p)$ sont supplémentaires dans $E$.

**1.b** En déduire que la trace de $p$ (notée $\mathrm{Tr}\,(p)$) est égale au rang de $p$ (noté $\mathrm{rg}\,(p)$).

**1.c** Un endomorphisme $u$ de $E$ vérifiant $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u)$ est-il nécessairement un projecteur de $E$ ?

**2.** Donner un exemple de deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 telles que $A$ soit diagonalisable et $B$ ne soit pas diagonalisable. Justifier la réponse.

**3.** Soit $u$ un endomorphisme de $E$ de rang 1.

**a** Démontrer qu'il existe une base $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ de $E$ telle que la matrice $Mat_\beta(u)$ de $u$ dans $\beta$ soit de la forme :

$$Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{où } a_1, \cdots, a_n \text{ sont } n \text{ nombres réels.}$$

**b** Démontrer que $u$ est diagonalisable si, et seulement si, la trace de $u$ est non nulle.

**c** On suppose que $\mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{rg}\,(u) = 1$. Démontrer que $u$ est un projecteur.

**d** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que $A$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera l'image et le noyau.

**Exercice 5.**

### Notations et rappels

Soit $n$ un entier supérieur à 1. On désigne par $\mathrm{diag}\,(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont les réels $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ dans cet ordre. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa transposée.

On munit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique noté $\langle \,|\, \rangle$ et de la norme euclidienne $|| \quad ||$ associée. On note $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace des endomorphismes symétriques de $E$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes $s$ de $E$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle s(x) \mid y \rangle = \langle x \mid s(y) \rangle.$$

Un endomorphisme symétrique $s$ de $E$ est dit symétrique positif (respectivement symétrique défini positif) si :

$$\forall x \in E,\ \langle s(x) \mid x \rangle \geqslant 0 \quad \text{(respectivement } \forall x \in E \setminus \{0\},\ \langle s(x) \mid x \rangle > 0).$$

Une matrice symétrique $S$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive (respectivement symétrique définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geqslant 0 \quad \text{(respectivement } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0).$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement symétriques définies positives) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On rappelle qu'un endomorphisme $s$ de $E$ est symétrique (respectivement symétrique positif, symétrique défini positif) si, et seulement si, sa matrice dans toute base orthonormée de $E$ est symétrique (respectivement symétrique positive, symétrique définie positive).

On admet que, pour tous réels positifs $a_1, \cdots, a_n$,

$$\left( \prod_{i=1}^{n} a_i \right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \text{ (inégalité arithmético-géométrique).}$$

**Objectif du problème**

On se donne une matrice $S$ de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) et on étudie le maximum (ou minimum) de la forme linéaire $A \mapsto \mathrm{Tr}\,(AS)$ sur des ensembles de matrices.

## Questions préliminaires

**1.**

**1.a** Enoncer (sans démonstration) le théorème de réduction des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien $E$ et sa version relative aux matrices symétriques réelles.

**1.b** Toute matrice symétrique à coefficients complexes est-elle nécessairement diagonalisable ? On pourra par exemple considérer la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ :

$$S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}.$$

**2.** Soit $s \in \mathcal{S}(E)$, de valeurs propres (réelles) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

Soit $\beta = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $\varepsilon_i$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_i$. Pour tout vecteur $x$ de $E$, on pose :

$$R_s(x) = \langle s(x) \mid x \rangle\ .$$

**2.a** Exprimer $R_s(x)$ à l'aide des $\lambda_i$ et des coordonnées de $x$ dans la base $\beta$.

**2.b** En déduire l'inclusion : $R_s\left(S(0,1)\right) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ où $S(0,1)$ désigne la sphère unité de $E$.

**3.**

**3.a** On suppose dans cette question que $s$ est symétrique positif (respectivement symétrique défini positif). Démontrer que les valeurs propres de $s$ sont toutes positives (respectivement strictement positives).

**3.b** Soit $S = (s_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n.$$

On note $s$ l'endomorphisme de $E$ représenté par $S$ dans la base canonique $B = (e_1, \cdots, e_n)$. Exprimer le terme général $s_{i,j}$ de $S$ comme un produit scalaire et démontrer que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \quad \lambda_1 \leqslant s_{i,i} \leqslant \lambda_n.$$

## Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

On note $I_n$ la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**4.** Démontrer que l'application $M \mapsto {}^tMM - I_n$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**5.** Justifier que, si $A = (a_{i,j})$ est une matrice orthogonale, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \cdots, n\}^2 \quad | a_{i,j} | \leqslant 1.$$

**6.** En déduire que le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**7.** Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de valeurs propres (positives) $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. On pose $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Si $A$ est une matrice orthogonale, on note $T(A)$ le nombre réel $T(A) = \operatorname{Tr}(AS)$.

**7.a** Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale $B$ telle que :

$$T(A) = \operatorname{Tr}(B\Delta).$$

**7.b** Démontrer que l'application $T$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, que l'on notera $t$.

**7.c** Démontrer que, pour toute matrice orthogonale $A$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leqslant \operatorname{Tr}(S)$, puis déterminer le réel $t$.