

" Un con qui marche va plus loin qu'un intellectuel assis

Teddy et Adrien

### **Autour des sommes d'Euler**

Dans tout le problème, on note pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ .

On note  $\zeta$  la fonction définie pour  $x > 1$  par  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ .

Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite  $(H_n)$  et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour  $r$  entier naturel supérieur ou égal à 2,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$  à l'aide de valeurs de la fonction  $\zeta$  en des points entiers.

## **I Représentation intégrale de sommes de séries**

**I.A -**

**I.A.1)** Justifier que la série de terme général  $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^n \frac{dt}{t}$  converge.

**I.A.2)** Montrer qu'il existe une constante réelle  $A$  telle que  $H_n = \ln n + A + o(1)$ . En déduire que  $H_n \sim \ln n$ .

**I.B -** Soit  $r$  un entier naturel.

Pour quelles valeurs de  $r$ , la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$  est-elle convergente ?

Dans toute la suite on notera  $S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$  lorsque la série converge.

**I.C -**

**I.C.1)** Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions  $t \mapsto \ln(1-t)$  et  $t \mapsto \frac{1}{1-t}$  ainsi que leur rayon de convergence.

**I.C.2)** En déduire que la fonction

$$t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$$

est développable en série entière sur  $] -1, 1[$  et préciser son développement en série entière à l'aide des réels  $H_n$ .

**I.D -** Pour tout couple d'entiers naturels  $(p, q)$  et pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q dt \quad \text{et} \quad I_{p,q}^\varepsilon = \int_\varepsilon^1 t^p (\ln t)^q dt$$

**I.D.1)** Montrer que l'intégrale  $I_{p,q}$  existe pour tout couple d'entiers naturels  $(p, q)$ .

**I.D.2)** Montrer que,  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in ]0, 1[, I_{p,q}^\varepsilon = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^\varepsilon - \frac{\varepsilon^{p+1} (\ln \varepsilon)^q}{p+1}$ .

**I.D.3)** En déduire que l'on a  $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$ .

**I.D.4)** En déduire une expression de  $I_{p,q}$  en fonction des entiers  $p$  et  $q$ .

**I.E** – Soit  $r$  un entier naturel non nul et  $f$  une fonction développable en série entière sur  $]-1, 1[$ .

On suppose que pour tout  $x$  dans  $]-1, 1[$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et que  $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$  converge absolument.

Montrer que  $\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) dt = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ .

**I.F** –

**I.F.1)** Déduire des questions précédentes que pour tout entier  $r \geq 2$ ,

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt$$

**I.F.2)** Établir que l'on a alors  $S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$ .

**I.F.3)** En déduire que  $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt$

puis trouver la valeur de  $S_2$  en fonction de  $\zeta(3)$ .

## II La fonction $\beta$

**II.A** – *La fonction  $\Gamma$*

**II.A.1)** Soit  $x > 0$ . Montrer que  $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

Dans toute la suite, on notera  $\Gamma$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

On admettra que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel  $x > 0$ , la relation  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

**II.A.2)** Soit  $x$  et  $\alpha$  deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} dt$  et donner sa valeur en fonction de  $\Gamma(x)$  et  $\alpha^x$ .

**II.B** – *La fonction  $\beta$  et son équation fonctionnelle*

Pour  $(x, y)$  dans  $(\mathbb{R}^{+*})^2$ , on définit  $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ .

**II.B.1)** Justifier l'existence de  $\beta(x, y)$  pour  $x > 0$  et  $y > 0$ .

**II.B.2)** Montrer que pour tous réels  $x > 0$  et  $y > 0$ ,  $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ .

**II.B.3)** Soient  $x > 0$  et  $y > 0$ . Établir que  $\beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y)$ .

**II.B.4)** En déduire que pour  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $\beta(x+1, y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)$ .

**II.C** – *Relation entre la fonction  $\beta$  et la fonction  $\Gamma$*

On veut montrer que pour  $x > 0$  et  $y > 0$ ,  $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$  relation qui sera notée  $(\mathcal{R})$ .

**II.C.1)** Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation  $(\mathcal{R})$  pour  $x > 1$  et  $y > 1$ .

Dans toute la suite de cette question on suppose  $x > 1$  et  $y > 1$ .

**II.C.2)** Montrer que  $\beta(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du$ .

On pourra utiliser le changement de variable  $t = \frac{u}{1+u}$ .

**II.C.3)** On note  $F_{x,y}$  la primitive sur  $\mathbb{R}^+$  de  $t \mapsto e^{-t} t^{x+y-1}$  qui s'annule en 0. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y)$$

**II.C.4)** Soit  $G(a) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)a) du$ .

Montrer que  $G$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

**II.C.5)** Montrer que  $\lim_{a \rightarrow +\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x, y)$ .

**II.C.6)** Montrer que  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur tout segment  $[c, d]$  inclus dans  $\mathbb{R}^{+*}$ , puis que  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**II.C.7)** Exprimer pour  $a > 0$ ,  $G'(a)$  en fonction de  $\Gamma(x)$ ,  $e^{-a}$  et  $a^{y-1}$

**II.C.8)** Déduire de ce qui précède la relation  $(\mathcal{R})$ .

### III La fonction digamma

On définit la fonction  $\psi$  (appelée fonction digamma) sur  $\mathbb{R}^{+*}$  comme étant la dérivée de  $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ .

Pour tout réel  $x > 0$ ,  $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ .

**III.A** – Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x}$ .

#### III.B – Sens de variation de $\psi$

**III.B.1)** À partir de la relation  $(\mathcal{R})$ , justifier que  $\frac{\partial \beta}{\partial y}$  est définie sur  $(\mathbb{R}^{+*})^2$ .

Établir que pour tous réels  $x > 0$  et  $y > 0$ ,  $\frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) = \beta(x, y)(\psi(y) - \psi(x+y))$ .

**III.B.2)** Soit  $x > 0$  fixé. Quel est le sens de variation sur  $\mathbb{R}^{+*}$  de la fonction  $y \mapsto \beta(x, y)$  ?

**III.B.3)** Montrer que la fonction  $\psi$  est croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

#### III.C – Une expression de $\psi$ comme somme d'une série de fonctions

**III.C.1)** Montrer que pour tout réel  $x > -1$  et pour tout entier  $n \geq 1$

$$\psi(1+x) - \psi(1) = \psi(n+x+1) - \psi(n+1) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

**III.C.2)** Soit  $n$  un entier  $\geq 2$  et  $x$  un réel  $> -1$ . On pose  $p = E(x) + 1$ , où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ .

Prouver que

$$0 \leq \psi(n+x+1) - \psi(n) \leq H_{n+p} - H_{n-1} \leq \frac{p+1}{n}$$

**III.C.3)** En déduire que, pour tout réel  $x > -1$ ,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

#### III.D – Un développement en série entière

On note  $g$  la fonction définie sur  $[-1, +\infty[$  par

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

**III.D.1)** Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[-1, +\infty[$ .

Préciser notamment la valeur de  $g^{(k)}(0)$  en fonction de  $\zeta(k+1)$  pour tout entier  $k \geq 1$ .

**III.D.2)** Montrer que pour tout entier  $n$  et pour tout  $x$  dans  $] -1, 1 [$

$$\left| g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \zeta(2) |x|^{n+1}$$

Montrer que  $g$  est développable en série entière sur  $] -1, 1 [$ .

**III.D.3)** Prouver que pour tout  $x$  dans  $] -1, 1 [$ ,

$$\psi(1+x) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \zeta(n+1) x^n$$

## IV Une expression de $S_r$ en fonction de valeurs entières de $\zeta$

Dans cette partie, on note  $B$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  par  $B(x) = \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x, 1)$ .

### IV.A – Une relation entre $B$ et $\psi$

Justifier que  $B$  est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

À l'aide de la relation trouvée au III.B.1 établir que pour tout réel  $x > 0$

$$xB(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(1+x))$$

En déduire que  $B$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

### IV.B – Expression de $S_r$ à l'aide de la fonction $B$

**IV.B.1)** Montrer que pour tout réel  $x > 0$ ,  $B(x) = \int_0^1 (\ln(1-t))^2 t^{x-1} dt$ .

**IV.B.2)** Donner sans justification une expression, à l'aide d'une intégrale, de  $B^{(p)}(x)$ , pour tout entier naturel  $p$  et tout réel  $x > 0$ .

**IV.B.3)** En déduire que pour tout entier  $r \geq 2$ ,  $S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \lim_{x \rightarrow 0^+} B^{(r-2)}(x)$ .

**IV.B.4)** Retrouver alors la valeur de  $S_2$  déjà calculée au I.F.3.

**IV.C –** Soit  $\varphi$  la fonction définie  $] -1, +\infty [$  par  $\varphi(x) = (\psi(1+x) - \psi(1))^2 + (\psi'(1) - \psi'(1+x))$ .

**IV.C.1)** Montrer que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur son ensemble de définition et donner pour tout entier naturel  $n \geq 2$  la valeur de  $\varphi^{(n)}(0)$  en fonction des dérivées successives de  $\psi$  au point 1.

**IV.C.2)** Conclure que, pour tout entier  $r \geq 3$ ,

$$2S_r = r\zeta(r+1) - \sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1)\zeta(r-k)$$

---

• • • FIN • • •

---