Devoir surveillé 8

Série de fonctions - Endomorphismes particuliers - 2h

" Le lever de coude est la meilleure façon de ne pas baisser les bras"

Teddy et Adrien

Exercice 1.

Notons u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. La matrice de u dans la base canonique est :

$$U = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Q1}}$ Que peut-on dire sur la nature d'un endomorphisme qui a une matrice symétrique dans une BON ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Vérifier que U est une matrice orthogonale. Est-elle dans $O_3^+(\mathbb{R})$?

$\boxed{\text{Q3}}$ Sans calcul, montrer que $\text{Sp}(u) \subset \{-1; 1\}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Sachant que U est orthogonal et symétrique, que peut-on en déduire sur la nature de u ?

$\boxed{\text{Q5}}$ En utilisant la trace, déterminer la multiplicité des valeurs propres. En déduire le polynôme caractéristique de U.

$\boxed{\text{Q6}}$ Déterminer une base de l'espace vectoriel des points fixes de u. Que peut-on en déduire sur la nature de u à l'aide de la classification des matrices orthogonales de taille 3×3 ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Est-ce que les résultats des questions Q4 et Q6 sont compatibles ?

Exercice 2.

Considérons les fonctions définies par :

$$C(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \cos(kx)}{k} \qquad S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \sin(kx)}{k} \qquad E(x) = C(x) + iS(x)$$

On rappelle que si f est une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, alors f est dérivable si et seulement si $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont dérivables. On a alors $f' = \text{Re}(f)' + i\text{Im}(f)'$

Partie I. Études sur $]-1;1[$.

Posons, pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$c_k(x) = \frac{x^k \cos(kx)}{k} \qquad s_k(x) = \frac{x^k \sin(kx)}{k}$$

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit A dans $[0;1[$. Montrer que pour tout x de $[-A;A]$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$|c_k(x)| \leq A^k \qquad \text{et} \qquad |s_k(x)| \leq A^k$$

En déduire que C et S sont définies et continue sur $]-1;1[$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrer que C et S sont dérivables sur $]-1;1[$. Calculer C' et S'.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrer que pour tout x de $]-1,1[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}e^{ikx} = \frac{e^{ix}}{1-xe^{ix}}$$

$\boxed{\text{Q4}}$ En déduire que pour tout x de $]-1;1[$, on a :

$$E'(x) = \frac{e^{ix}+ixe^{ix}}{1-xe^{ix}}$$

Partie II. Autre expression sur $]-1;1[$.

Pour tout nombre complexe z non nul, on pose :

$$L(z) = \frac{1}{2}\ln(|z|^2) + i\mathrm{Arg(z)}$$

où $\mathrm{Arg}(z)$ désigne l'argument principal de z, c'est-à-dire l'argument compris de $]-\pi;\pi]$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Vérifier que pour tout z vérifiant $\mathrm{Re}(z) > 0$, on a :

$$Arg(z) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$$

Puis montrer à l'aide d'un contre exemple que la formule est fausse dans le cas où $\mathrm{Re}(z) < 0$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Calculer ensuite :

$$L(1) \qquad L(1-e^{i}) \qquad L(1+e^{-i})$$

$\boxed{\text{Q7}}$ Soit a et b des fonctions C^1 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $a(x) > 0$ pour tout x de I. Notons $f = a + ib$. Montrer que :

$$(L\,o\,f)' = \frac{f'}{f}$$

$\boxed{\text{Q8}}$ En déduire que pour tout x de $]-1;1[$: $E(x) = -L(1-xe^{ix})$

Partie II. Convergence en -1 et 1.

$\boxed{\text{Q9}}$ Soit ε dans $\{0,1\}$. Posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{\varepsilon k}e^{ik} \qquad M = \frac{2}{|1-(-1)^{\varepsilon}e^{i}|}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ |S_n(x)| \leq M$$

$\boxed{\text{Q10}}$ Soient q de $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^{\varepsilon k} e^{ik}}{k} = \sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) S_k + \frac{S_q}{q} - S_0$$

$\boxed{\text{Q11}}$ Montrer que la série :

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) S_k$$

est absolument convergente.

$\boxed{\text{Q12}}$ En déduire que C et S sont définies sur $[-1;1]$. On admet que S et C convergent uniformément sur $[-1;1]$.

$\boxed{\text{Q13}}$ En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k)}{k} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k} = \frac{\pi - 1}{2}$$

Que valent les sommes suivantes ?

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(k)}{k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k)}{k}$$