2020-2021 # Devoir surveillé 8 PSI

Probabilité et suites de fonctions - 2h

> " *Pour qu'il y ait le moins de mécontentement possible, il faut toujours taper sur les mêmes*"
>
> Adrien et Teddy

Exercice 1.

Commençons par une citation de J.C. VanDamme :

> " J'adore les cacahuètes. Tu bois une bière et tu en as marre du goût. Alors tu manges des cacahuètes. Les cacahuètes c'est doux et salé, fort et tendre, comme une femme. Et après tu as de nouveau envie de boire de la bière. Les cacahuètes c'est le mouvement perpétuel à la portée de l'homme ".

Supposons que lorsque J.C. VanDamme boive une gorgée de bière, il y a 2 chances sur 3 qu'il mange des cacahuètes à l'instant d'après et donc 1 sur 3 qu'il reprenne de la bière. Inversement quand il prend une poignée de cacahuètes, il y a 1 chance sur 2 qu'à l'instant d'après il boive une gorgée de bière et donc une sur 2 qu'il reprenne des cacahuètes. Notons B_n et C_n les événements :

$$\begin{array}{ccl} B_n & : & \text{"J.C. VanDamme boit de la bière à l'instant n"} \\ C_n & : & \text{"J.C. VanDamme mange des cacahuètes à l'instant n"} \end{array}$$

et b_n et c_n leurs probabilités.

1. Posons $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ Déterminer une relation de récurrence sur les X_n
2. En déduire a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 2.

Un homme rentre chez lui le soir et dispose d'un trousseau de k clés qui se ressemblent beaucoup. Lorsqu'il est dans son état normal, il essaie une clé au hasard puis si le résultat est infructueux, il la met de côté et essaie une clé au hasard parmi les clés restantes. A chaque échec, il répète le même processus sur les clés non encore essayées. Lorsque cet homme est ivre, il essaie une clé au hasard puis, à chaque échec, il remet la clé essayée avec les autres de sorte qu'à chaque essai, le choix porte sur la totalité des clés.

1. Calculer la probabilité que l'homme parvienne à ouvrir sa porte en n essais (exactement) sachant qu'il est ivre. Même question sachant qu'il est dans son état normal.
2. Supposons qu'il est ivre un soir sur trois. Calculer la probabilité qu'il parvienne à ouvrir sa porte en n essais.
3. Donner la probabilité que l'homme soit ivre sachant qu'il a réussi à ouvrir sa porte en n essais.

Exercice 3.

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$$

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrer que f est définie sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrer que f est continue sur I.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrer que f est dérivable sur I. Que vaut f' ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrer que f est de classe C^∞ sur I. Que vaut $f^{(p)}$ pour p dans $\mathbb{N}$?

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrer que pour tout x de I :

$$F(x+1) + F(x) = \frac{1}{x}$$

$\boxed{\text{Q6}}$ En déduire un équivalent de F en 0.

Exercice 4.

Considérons la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \sin(kx)}{k}$$

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrer que f est définie et continue sur $I =]-1;1[$

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrer que f est dérivable sur I. Que vaut f' ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrer que pour tout x de $]-1,1[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{n-1} e^{inx} = \frac{e^{ix}\left(1 - xe^{-ix}\right)}{|1 - xe^{ix}|^2}$$

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrer que :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x\sin(x)}{1 - x\cos(x)}\right)$$

$\boxed{\text{Q5}}$ En déduire les sommes :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(k)}{k}$$