2020-2021 # Devoir surveillé 4 PSI

Intégrales généralisées - Espaces vectoriels normés - 4h

" *La cerise sur le gâteau passe inaperçu lorsqu'elle est déposée sur un gâteau aux cerises.*"

Marie-Océane, Teddy, Adrien.

Exercice 1.

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$I_{13} = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx \qquad I_{14} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \qquad I_{15} = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(x)}{x^2} dx$$

Exercice 2.

Considérons les intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2} dt \qquad I_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2} dt$$

$\boxed{\text{Q1}}$ Déterminer les réels où l'intégrale I est impropre, puis montrer la convergence de I.

$\boxed{\text{Q2}}$ Déterminer les réels a, b et c vérifiant :

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2}$$

$\boxed{\text{Q3}}$ En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)} dt$

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrer que :

$$I_\varepsilon = \frac{\ln(\varepsilon)}{2(1+\varepsilon^2)} - \frac{1}{2}\ln(\varepsilon) + \frac{1}{4}\ln(1+\varepsilon^2)$$

$\boxed{\text{Q5}}$ En déduire que $I = 0$

$\boxed{\text{Q6}}$ Le but de la question est de retrouver, avec une astuce, la valeur de I. Effectuer, en le justifiant, le changement de variable $T = \frac{1}{t}$ dans I, puis conclure.

Exercice 3.

Dans cet exercice on identifie les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes. Soient $\|...\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et S la sphère unité associée. On pose pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\|A\| = \underset{x\in S}{Sup}\|Ax\|$$

1. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, posons $M = Max(\|Ae_1\|,\dots,\|Ae_n\|)$. Montrer que :

$$\forall X = {}^t(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ \|AX\| \leq M(|x_1| + \dots + |x_n|)$$

2. En déduire que le sup définissant $\|...\|$ existe puis montrer que $\|...\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que pour tout X de $\mathbb{R}^n$: $\|AX\| \leq \|A\|.\|X\|$
4. En déduire que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$. Les normes de $\|...\|$ vérifiant cette propriété sont des normes matricielles ou des normes d'algèbre.

Exercice 4.

Notons E l'ensemble des suites réelles dont la somme des carrées des termes convergent. En d'autres termes :

$$E = \left\{(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\ \sum x_i^2 \text{ converge}\right\}$$

Partie I. L'espace vectoriel normé E

1. Vérifier que pour tout a et b de $\mathbb{R}$, on a :

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

2. En déduire que E est un espace $\mathbb{R}$-vectoriel.
3. Montrer que l'application $\|...\|$ de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} x_i^2}$$

   est une norme sur E.
4. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont dans E et déterminer leur norme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = \frac{1}{2^n},\ \ b_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$$

Partie II. Des applications continues sur E

On munit à présent E de la norme définie dans la question précédente et on note f et g les applications définies par :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \mapsto & \mathbb{R} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & x_0 \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccc} E & \mapsto & E \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (x_n + x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

5. Montrer que g est bien à valeurs dans E.
6. Montrer que f et g sont des applications linéaires.
7. Montrer qu'une application linéaire h est λ-lipschitzienne de (F_1, N_1) dans (F_2, N_2) si et seulement si :

$$\forall x \in F_1,\ \ N_2(f(x)) \leq \lambda N_1(x)$$

8. Montrer que f est lipschitzienne, donc continue.
9. Montrer que g est lipschitzienne, donc continue.

Exercice 5.

Considérons les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt \qquad J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2} dt$$

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale I suivante de deux manières différentes.

Q1 Justifier la convergence de I et J.

Partie I. Calcul de I - Méthode 1.

Q2 Calculer K.

Q3 Montrer en effectuant le changement de variable, après l'avoir justifié, $T = t - \frac{1}{t}$ que : $I + J = 2K$.

Q4 Montrer que $I = J$. En déduire la valeur de I.

Partie II. Primitive de l'inverse d'un polynôme.

Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 ayant une valeur de Δ strictement négative. Posons $\delta = \sqrt{-\Delta}$

Q5 Considérons l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{\delta} arctan\left(\frac{2ax+b}{\delta}\right)$$

Calculer la dérivée de f.

Q6 En déduire la forme des primitives de : $\frac{1}{P}$.

Partie III. Calcul de I - Méthode 2.

Q7 Décomposer le polynôme $X^4 + 1$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Q8 On admettra (th de décomposition en éléments simples) qu'il existe un unique quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de $\mathbb{C}^4$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^4+1} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \qquad (*)$$

Quelles relations entre α, β, γ et δ découlent de la parité de l'application $\frac{1}{1+x^4}$.

Q9 Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)$$

Q10 Déterminer les valeurs des intégrales :

$$J_+ = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} \qquad J_- = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Q11 En déduire la valeur de I.