

" La cerise sur le gâteau passe inaperçue lorsqu'elle est déposée sur un gâteau aux cerises."

Marie-Océane, Teddy, Adrien.

Exercice.

Soit p dans $[1; +\infty[$. Notons $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles. On note :

$$l^p = \left\{ u \in E \mid \sum |u_k|^p \text{ converge} \right\} \quad l^\infty = \left\{ u \in E \mid \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k| \text{ existe} \right\}$$

De plus pour u dans l^p et v dans l^∞ , on note :

$$\|u\|_p = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \|v\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |v_k|$$

Enfin, on rappelle l'inégalité de Minkowski sur \mathbb{R}^n :

$$\forall p \in [1; +\infty[, \forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Q1 Nous allons montrer dans un premier temps que les espaces $(l^p, \|\cdot\|_p)$ pour p dans $[1; +\infty]$ sont des espaces vectoriels normés.

a. Montrer que pour tout u, v de l^p et pour tout n de \mathbb{N} :

$$\sum_{i=1}^n |u_i + v_i|^p \leq \|u\|_p^p + \|v\|_p^p$$

En déduire que $u + v$ est dans l^p .

b. Montrer que les ensembles l^p pour p dans $[1; +\infty[$ et l^∞ sont des \mathbb{R} espaces vectoriels.

c. Montrer pour tout p de $[1; +\infty[$ que les applications $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes respectivement sur l^p et l^∞ .

Q2 Le but de cette question est de montrer que l'application $p \mapsto \|x\|_p$ est décroissante sur son domaine de définition. Soient p et q dans $[1; +\infty[$ vérifiant $p \leq q$ et x dans $l^p \cap l^q \cap l^\infty$.

a. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \frac{|x_k|^p}{\|x\|_q^p} \geq \frac{|x_k|^q}{\|x\|_q^q}$$

b. En déduire que

$$\|x\|_p \geq \|x\|_q \geq \|x\|_\infty$$

Q3 Nous allons montrer que les espaces l^p sont de plus en plus grands.

a. Montrer que : $\forall p \in [1; +\infty[, l^p \subset l^\infty$.

b. Soient p et q dans $[1; +\infty]$. Montrer que si $p \leq q$ alors $l^p \subset l^q$. On pourra utiliser la relation suivante, après l'avoir montrée :

$$|u_k|^q \leq |u_k|^p \|u\|_\infty^{q-p}$$

Problème.

I Exponentielle tronquée

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?
2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver pour tout réel x strictement positif, pour tout entier n , la relation :

$$R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (u e^{-u})^n \, du.$$

Soit y un réel strictement positif. On pose

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{n!} y^n.$$

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1}/a_n$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

4. On suppose dans cette question que $x \in]0, 1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto u e^{-u}$ admet, sur $[0, x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire qu'au voisinage de l'infini,

$$R_n(x) = o(e^{nx}) \text{ puis que } T_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{nx}.$$

5. Démontrer la relation $n! = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$ pour tout n entier naturel.

6. Pour tout entier $n \geq 1$, montrer l'identité suivante :

$$T_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} (u e^{-u})^n \, du.$$

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On pourra l'écrire $(ue^{-u})^n \leq (xe^{-x})^{n-1} u e^{-u}$ pour $u \geq x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$, pour $x = 1$, sera obtenue dans la suite du problème.

II Méthode de Laplace

On admettra la formule de l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}.$$

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

H1 : $f(0) = 1$

H2 : $f''(0) = -1$

H3 : Pour tout $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$ $0 < f(x) < 1$

H4 : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0, 1[$.

Pour $x \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, on pose

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(f(x)).$$

8. Montrer que $f'(0) = 0$ puis, à l'aide d'un développement limité, déterminer $k = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$.

On prolonge φ en posant $\varphi(0) = k$.

9. Montrer que la fonction φ , sur $]-1, 1[$, est minorée par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que pour tout $x \in [-1, 1]$, on ait

$$f(x) \leq e^{-ax^2}.$$

Indication : on pourra distinguer les cas où $f(1)$ et $f(-1)$ sont non nuls des cas où l'un des deux au moins est nul.

Pour tout n entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ par

$$g_n(u) = \begin{cases} \left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

10. Montrer que chaque fonction g_n est continue par morceaux sur \mathbf{R} , et que la suite de fonctions $(g_n, n \geq 1)$ converge simplement sur \mathbf{R} vers la fonction g telle que pour tout $u \in \mathbf{R}$,

$$g(u) = e^{-u^2/2}.$$

Signifie que $g_n(x)$ converge vers $g(x)$ pour tout x

11. En déduire que

$$\int_{-1}^1 \left(f(x)\right)^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Question admise pour les 3/2

Pour les 5/2, il faut utiliser le th de convergence dominée.

On en déduit de la même manière que

$$\int_0^1 \left(f(x)\right)^n dx \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \quad (1)$$

III Formule de Stirling

Avertissement : même si elle fait partie du programme, on (re)démontre dans cette partie la formule de Stirling.

12. Pour tout entier $n \geq 1$, déduire de la question 5 que

$$n! = n^{n+1} e^{-n} (I_n + J_n),$$

avec

$$I_n = \int_{-1}^1 (x+1)^n e^{-nx} dx \text{ et } J_n = \int_1^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx} dx.$$

13. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $x+1 \leq 2^x$. En déduire une majoration de J_n .
14. En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de I_n .
15. En déduire que

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

IV Formule de Bernstein

On reprend les notations $T_n(x)$ et $R_n(x)$ introduites dans la partie I.

16. Pour tout entier n non nul, montrer l'identité suivante :

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} dt.$$

17. En déduire un équivalent de $R_n(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Prouver que

$$T_n(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^n.$$

V Première répétition

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. *Par exemple, avec $n = 5$, si les 6 tirages donnent successivement 3-2-1-5-2-3, on pose $X = 5$.*

Pour représenter cette expérience, on introduit l'espace $\Omega = \{1, \dots, n\}^{n+1}$ et les variables aléatoires coordonnées (U_1, \dots, U_{n+1}) définies par

$$\begin{aligned} U_j : \Omega &\longrightarrow \{1, \dots, n\} \\ w = (w_1, \dots, w_{n+1}) &\longmapsto w_j. \end{aligned}$$

En d'autres termes, U_j est le numéro de la boule tirée au j -ième tirage. On suppose que la probabilité \mathbf{P} sur Ω est telle que les variables aléatoires $(U_j, j = 1, \dots, n+1)$ sont indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

18. Pour une entrée `liste = [w1, ..., wn+1]`, écrire un pseudo-code ou un code Python pour calculer la valeur de $X(w_1, \dots, w_{n+1})$.

Si nécessaire, on admettra l'existence d'une fonction qui permet de tester l'appartenance d'un élément w à une liste L : $(w \text{ in } L)$ renvoie « True » si $w \in L$, « False » sinon.

19. Montrer que pour $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, l'événement $(X = k)$ est de probabilité non nulle.

20. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, montrer que

$$\mathbf{P}(X > k+1) = \mathbf{P}(X > k+1 \mid X > k) \mathbf{P}(X > k).$$

21. En déduire que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbf{P}(X > k) = \frac{n!}{n^k (n-k)!}.$$

22. Etablir l'identité suivante :

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X > k).$$

23. En utilisant les questions précédentes, donner un équivalent simple de $\mathbf{E}[X]$ lorsque n tend vers $+\infty$.

FIN DU PROBLÈME