2020-2021 **Devoir surveillé 3** PSI

Devoir surveillé 3

Intégrales généralisée - 2h

" *Derrière toute idée se cache une ampoule.* "

Teddy et Adrien

Exercice 1.

Soient a et b dans $\mathbb{R}$. Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$I_4 = \int_0^1 \frac{t\ln(t)}{t-1}dt \qquad I_5 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt \qquad I_6 = \int_0^{+\infty} (x - \sqrt{1+x^2})dx$$

Exercice 2.

Pour n dans $\mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 \ln^n(t)dt$$

1. Montrer par récurrence que les intégrales I_n sont convergentes. En déduire une relation de récurrence sur les I_n.
2. En déduire la valeur de I_n.

Exercice 2.

Soient α dans $\mathbb{R}$ et β dans $\mathbb{R}^*$. Notons :

$$S = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x^\alpha}dx \qquad C = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(\beta x)}{x^\alpha}dx$$

Partie I. $\alpha > 1$

Q1 Montrer que si $\alpha > 1$ alors C est absolument convergente. On admettra que S est également absolument convergente.

Partie II. $\alpha \in]0,1]$

Q2 On supposons à présent que α est dans $]0,1]$. Montrer que C est convergente.

Q3 Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a : $|\cos(x)| \geq \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

Q4 En déduire que C est semi-convergente.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos(x)|}{x^\alpha} dx \quad \geq \quad \frac{1}{\pi^\alpha (k+1)^\alpha} \int_0^\pi |\cos(x)| dx$$

$\boxed{\text{Q6}}$ Remontrer en utilisant la question précédente que C n'est pas absolument convergente pour $\beta = 1$, puis pour β quelconque.

Partie III. $\alpha \leq 0$

$\boxed{\text{Q7}}$ Considérons dans cette partie α dans $\mathbb{R}^-$. Notons pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$a_k \quad = \quad \int_{\frac{(2k-1)\pi}{2\beta}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2\beta}} \frac{\cos(\beta x)}{x^\alpha} dx$$

Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$a_k \quad = \quad (-1)^k \beta^{\alpha-1} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{(x + k\pi - \frac{\pi}{2})^\alpha} dx$$

$\boxed{\text{Q8}}$ Montrer que la suite (a_k) ne tend pas vers 0.

$\boxed{\text{Q9}}$ Que peut-on en déduire sur la série de terme général (a_k) ? En déduire que l'intégrale C est divergente.

Exercice 2.

Soit f dans $\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. Posons :

$$I_n \quad = \quad \int_a^b f(t)\cos(nt)dt$$

Le but de l'exercice est de montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Montrer le résultat si f est C^1.
2. Montrer le résultat si f est une fonction en escaliers.
3. Montrer que toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée. En déduire que l'expression suivante existe :

$$\|f\|_\infty \quad = \quad \operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

4. On considère à présent f continue par morceaux. On rappelle (ou on admet) qu'il existe une suite (f_n) de fonctions en escaliers telle que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe g fonction en escaliers sur $[a,b]$ vérifiant :

$$\|f - g\|_\infty \; < \; \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

5. Montrer que pour tout ε dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$\left|\int_a^b f(t)\cos(nt)dt\right| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)\cos(nt)dt\right|$$

En déduire le lemme de Lebesgues.