2020-2021

Devoir surveillé 2

PSI

Réduction des endomorphismes - 4h

" Prédire, c'est très difficile, surtout s'il s'agit de l'avenir"

Adrien et Teddy

Exercice 1.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer un polynôme annulateur de A, scindé à racines simples.

Exercice 1.

Soit ϕ l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ \phi(M) = M - 2\,{}^tM$$

Q1 Montrer que ϕ est un endomorphisme.

Q2 Est-ce que ϕ est injective ? surjective ?

Q3 On note β la base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée des matrices élémentaires. Déterminer la matrice de ϕ dans cette base.

Q4 Est-ce que ϕ est diagonalisable ?

Q5 En déduire un polynôme de degré 2 qui soit annulateur de ϕ.

Q6 Montrer que l'ensemble :

$$F = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,/\, \phi\, o\, \phi(A) = A\}$$

est un sev de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Q7 De quelle dimension est F ?

Exercice 2.

Considérons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé. Le but de l'exercice est de montrer de plusieurs manières que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Les parties sont donc non seulement indépendantes, mais les résultats d'une partie ne peuvent pas être utilisés dans une autre.

Méthode 1. A la recherche d'une base.

Posons :

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Q1 Montrer que la famille $\beta = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Q2 Calculer les images de x_1, x_2, x_3 et x_4 par f_A. En déduire que A est diagonalisable. Quelles sont les valeurs propres ?

Méthode 2. Avec le polynôme caractéristique.

Q3 Calculer le polynôme caractéristique.

Q4 Déterminer les dimensions des sev propres. En déduire que A est diagonalisable.

Méthode 3. Avec les polynômes annulateurs.

Q5 Calculer A^2. En déduire que A est diagonalisable.

Q6 Pourquoi A a-t-elle au moins deux valeurs propres ?

Q7 En déduire les valeurs propres de A.

Exercice 3.

Pour tous entiers strictement positifs n et p, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I_n désigne la matrice identité d'ordre n. Enfin, pour une matrice A, ${}^tA$ désigne sa matrice transposée.

Partie I

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrer que la matrice A est diagonalisable.

$\boxed{\text{Q2}}$ Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

$\boxed{\text{Q3}}$ Déterminer une relation entre A^2, A et I_n. En déduire une relation entre A^{n+1}, A^n et A^{n-1} pour tout entier $n \geq 1$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = & u_n + 2u_{n-1} \\ v_{n+1} & = & v_n + 2v_{n-1} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Q5}}$ Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Partie II

Dans toute cette partie, on se fixe un entier $n \geq 1$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices U, V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ vérifiant :

$$\begin{array}{lllll} A & = & \lambda U & + & \mu V \\ A^2 & = & \lambda^2 U & + & \mu^2 V \\ A^3 & = & \lambda^3 U & + & \mu^3 V. \end{array}$$

$\boxed{\text{Q6}}$ Exprimer U et V en fonction de A et A^2. En déduire que :

$$A^3 = (\lambda + \mu) A^2 - \lambda\mu A$$

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$,

$$A^p = \lambda^p U + \mu^p V$$

$\boxed{\text{Q8}}$ Soient p dans $\mathbb{N}^*$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. On note $f^p = f \circ \cdots \circ f$ la $p^{\text{ième}}$ composée de f. Montrer que :

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^p$$

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda + \mu) f^p(x) - f^{p+1}(x).$$

$\boxed{\text{Q10}}$ En déduire que $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^p)$.

Partie III

On se donne toujours un entier $n \geq 1$ fixé. Soient U et V les matrices colonnes :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

On suppose U et V non nulles. Soit a un réel et A la matrice définie par $A = aI_n + U^tV$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Montrer que ${}^tVU$ est un réel que l'on exprimera en fonction des coefficients u_i et v_i.

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrer qu'il existe un réel k tel que $\left(U^tV\right)^2 = k\left(U^tV\right)$. En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_n$.

$\boxed{\text{Q14}}$ On note $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Donner l'expression de a_{ij} en fonction de a et des coefficients de U et V. En déduire que $\mathrm{Tr}\,(A) = na + {}^tVU$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Exprimer α et β en fonction de a et de $\mathrm{Tr}\,(A)$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Soit λ une valeur propre de A. Montrer que λ^2 est une valeur propre de A^2. En déduire que λ vérifie l'équation

$$\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$$

$\boxed{\text{Q17}}$ Montrer que les seules valeurs propres possibles de A sont

$$\lambda_1 = a \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \mathrm{Tr}\,(A) - (n-1)\,a$$

$\boxed{\text{Q18}}$ On suppose que $\mathrm{Tr}\left(U^tV\right) \neq 0$ et on considère les sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 définis par

$$E_i = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad AX = \lambda_i X\}$$

(a) Montrer que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

(b) Montrer par analyse-synthèse que, pour tout vecteur colonne X, il existe $X_1 \in E_1$ et $X_2 \in E_2$ tels que $X = X_1 + X_2$.

(c) En déduire que la matrice A est diagonalisable.

$\boxed{\text{Q19}}$ Montrer que la matrice A de la première partie est de ce type.