2020-2021 | **Devoir surveillé 10** | PSI

Devoir surveillé 10

Variables aléatoire et équations différentielles - 2h

" *Sans l'Rap et la drogue, négro*
J'aurais p't'être fait un bail comme Maths sup [. . .]
Fuck le compas, l'équerre et l'acacia
A 30 ans il m'faut Maserati pas d'Dacia "

Freeze Corleone choisi par Adnan

Une contrepétrie :
"*les canicules s'emballent*"

Teddy et Adrien

Exercice 1.

Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 suivante :

$$y''' + 3y'' - 4y = 0 \qquad (E)$$

Le but de cet exercice est de déterminer les solutions de cette équation différentielles de 2 manières.

1. Factoriser sur $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^3 + 3X^2 - 4$.
2. Déterminer les solutions de E qui sont de la forme $y(x) = e^{mx}$, puis de la forme $y(x) = xe^{mx}$.
3. En déduire toutes les solutions de E.
4. Mettre l'équation E sous la forme d'un système différentiel linéaire S d'ordre 1.
5. Résoudre S. Retrouver les solutions de E à l'aide des solutions de S.

Exercice 2.

Une espèce d'antilope peut avoir des portées de 1 à 4 petits. La portée se compose d'un seul petit avec probabilité 3/10, 2 petits avec probabilité 1/5, 3 petits avec probabilité 1/2. Mais la loi de la jungle est dure et chaque petit n'a qu'une chance sur 3 de survivre jusqu'à l'âge de un an, et ce indépendamment du devenir des autres petits. On note X le nombre de petits dans une portée et Y le nombre de petits d'une portée qui arrivent à l'âge de un an.

1. Quelles sont les valeurs prises par la variable X ? par la variable Y ?
2. Quelle est la loi de Y sachant que $X = 3$?
3. Quelle est la loi jointe du couple (X, Y) ? On pourra la représenter sous forme d'un tableau.
4. En déduire la loi de Y.
5. Calculer la covariance du couple (X, Y). Pouvait-on prévoir son signe ?
6. Par l'argument de votre choix, justifier que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3.

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$). Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels. Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Déterminer, pour k de $\mathbb{N}$, la valeur de $P(Y = k | X = i)$.
3. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
4. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 4.

Soient f une application λ lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, n un entier naturel non nul et x un réel de $[0,1]$. On définit de plus, les polynôme de Bernstein par :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

1. Soit S_n nune variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale $B(n,x)$. Démontrer que pour tout réel $\alpha > 0$:

$$P\left(|S_n - nx| > n\alpha\right) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

2. Soit la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, démontrer que son espérance vérifie :

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = B_n(f)(x)$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout couple (a,b) de $[0,1]^2$, on a :

$$|a-b| \leq \alpha \implies |f(a) - f(b)| \leq \varepsilon$$

   En déduire un majoration de $|f(\frac{k}{n}) - f(x)|$ pour tout entier k entre 0 et n vérifiant $|\frac{k}{n} - x| \leq \alpha$.
4. Justifier que :

$$\left| \sum_{|\frac{k}{n} - x| > \alpha} \left(f\left(\tfrac{k}{n}\right) - f(x)\right) P(S_n = k) \right| \leq 2\|f\|_\infty P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| > \alpha\right)$$

5. En déduire que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. Quel théorème a-t-on redémontré ?