2020-2021

Devoir surveillé 8

PSI

Correction

Exercice 1. 2. 3.

Cf. Cours et exercices

Exercice 4.

1. a) Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique. Alors il existe une base orthonormale de vecteurs propres de u, de plus ses valeurs propres sont réelles.
Pour toute matrice symétrique A il existe une matrice orthogonal P (${}^tPP = I_n$) et une matrice D diagonale réelle telle que $D = {}^tPAP$

b) Le théorème précédent n'est pas valable sur $\mathbb{C}$, par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$$

est symétrique non diagonalisable (le polynôme minimal $\pi_A = X^2$).

c) Un endormorphisme u de E vérifiant $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u)$ n'est pas nécessairement un projecteur, en effet, par exemple l'endomorphisme u associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{rg}(u) = 3$, mais u n'est pas un projecteur puisque $A^2 \neq A$.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, car $A^2 = A$ (A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$).
La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$, car $A^2 = 0$ (0 la seule valeur propre de A).

3. a) Soient e_n un vecteur non nul de E tel que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_n)$ et $(e_1, e_2, ..., e_{n-1})$ un base de $\ker u$, alors $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n)$ est une base de E. Posons $u(e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, donc

$$Mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

b) On a $\dim \ker u = n - 1$, donc 0 est une valeur propre de u. Donc 0 racine de χ_u d'ordre supérieure ou égal à $n - 1$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\chi_u = (-1)^n X^{n-1}(X - \lambda)$, donc $\lambda = \mathrm{Tr}(u)$. Ainsi u est digonalisable si et seulement si, $\mathrm{Tr}(u) \neq 0$.

c) D'après ce qui précède u est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(u) = \{0, 1\}$. Donc le polynôme minimal vaut $X(X - 1)$, ce qui donne $u^2 = u$, c'est à dire u est un projecteur.

d) On a $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rg}(A) = 1$, donc A représente un projecteur p de $\mathbb{R}^3$. Il est clair que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$ et $\ker p = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, e_1 + e_3)$ où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.

1. a) Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme symétrique. Alors il existe une base orthonormale de vecteurs propres de u, de plus ses valeurs propres sont réelles.
Pour toute matrice symétrique A il existe une matrice orthogonal P (${}^tPP = I_n$) et une matrice D diagonale réelle telle que $D = {}^tPAP$

b) Le théorème précédent n'est pas valable sur $\mathbb{C}$, par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$$

2. a) Notons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$ la décomposition de x dans la base $\mathscr{B}$. Alors

$$R_s(x) = (s(x)|x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \varepsilon_i | \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

b) Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$ un vecteur unitaire ($\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$), alors l'égalité précédente montre que

$$\lambda_1 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n,$$

et donc

$$R_s(S(0,1)) \subset [\lambda_1, \lambda_n].$$

3. a) Soit x un vecteur propre associé à une valeur propre λ d'un endomorohisme s symétrique positif (resp. symétrique défini positif), puisque $x \neq 0$, $(x|x) > 0$ d'où :

$$(x|u(x)) = \lambda(x|x)$$

ou encore $\lambda = \dfrac{(x|s(x)}{(x|x)} \geq 0$. (resp. $\lambda = \dfrac{(x|s(x)}{(x|x)} > 0$).

b) Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $s(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$ et donc $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$ $s_{ij} = (s(e_i)|e_j)$, en particulier $s_{ii} = R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n]$ (d'après la question 2.b).

4. Notons l l'application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$ définie par $l(A) = (A, A)$ et b l'application bilinéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $b(A, B) = {}^tAB$. Les deux applications sont continues puisque on est en dimension finie. Notons $\varphi : M \mapsto {}^tMM - I_n$, alors $\varphi = b \circ l - c$ où c est l'application constante : $M \mapsto I_n$, donc φ est continue.

5. Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc${}^tAA = I_n$ et par conséquent $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

En particulier, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 1$ et donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $|a_{ki}| \leq \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 1$.

6. On a $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}\{I_n\}$, donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
   D'autre part, considérons la norme $\|.\|_\infty$ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $\|A\|_\infty = \|(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}\|_\infty = \sup\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$. La question précédente montre que $\forall A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty \leq 1$, donc $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_\infty$ et comme la dimension est finie la partie $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée pour toute norme.
   En conséquence $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte comme fermée bornée d'un espace de dimension finie.

7. a) On sait qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = P\Delta{}^tP$, donc $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(AP\Delta{}^tP) = \mathrm{Tr}(PA{}^tP\Delta)$, donc il suffit de prendre $B = {}^tPAP \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.
   b) L'application T est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, car il s'agit d'une application linéaire. Comme $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact, alors T est bornée et atteint ses bornes sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, en particulier elle atteint son maximum sur $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.
   c) Posons $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $\Delta = (d_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. On a $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}d_{ki}$. Or $|b_{ik}| \leq 1$ car $B \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, donc

$$\mathrm{Tr}(AS) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}d_{ki} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{ki} = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(S).$$

   D'où $\forall A \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$, $T(A) \leq \mathrm{Tr}(S) = T(I_n)$. Ceci montre que le maximum est atteint au point $I_n \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$:

$$t = \sup_{A\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})} T(A) = \mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$