2020-2021

Devoir surveillé 8

PSI

Correction

" *Le lever de coude est la meilleure façon de ne pas baisser les bras*"

Teddy et Adrien

Exercice 1.

$\boxed{\text{Q1}}$ Un endomorphisme qui a admet une matrice symétrique dans une BON est un endomorphisme symétrique.

$\boxed{\text{Q2}}$ On vérifie facilement que : ${}^tUU = I$. Donc U est une matrice orthogonale. De plus si C_1, C_2, C_3 sont les colonnes de U, on a :

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9^2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -8 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{9^2}\begin{pmatrix} 36 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = C_3$$

Donc U est dans $O_3^+(\mathbb{R})$

$\boxed{\text{Q3}}$ Comme U est symétrique réelle, d'après le théorème spectral, $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}$. De plus u est orthogonal donc les valeurs propres de U sont de module 1. Ainsi $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Comme U est symétrique et orthogonal, on a $U^{-1} = {}^tU = U$. Ainsi $U^2 = UU^{-1} = I$. L'endomorphisme u est donc une symétrie. De plus u est symétrique, donc u est une symétrie orthogonale.

$\boxed{\text{Q5}}$ Notons respectivement λ et μ les multiplicité de 1 et -1. On a donc :

$$\begin{cases} \lambda.1 + \mu.(-1) & = & \text{tr}(U) = -1 \\ \lambda + \mu & = & 3 \end{cases}$$

On obtient donc $\lambda = 1$ et $\mu = 2$. Le polynôme caractéristique de U est donc :

$$\chi_u = (X-1)(X+1)^2$$

$\boxed{\text{Q6}}$ Déterminons les points fixes de U :

$$E_1 = \text{Ker}\begin{pmatrix} 10 & 8 & -4 \\ 8 & 10 & 4 \\ -4 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \text{Vect}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 9 & 18 \end{pmatrix} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'isométrie u est dans $O_3^+(\mathbb{R})$ et $\dim(E_1) = 1$. D'après la classification des isométries en dimension 3, il s'agit d'une rotation.

$\boxed{\text{Q7}}$ En cherchant l'angle θ de la rotation avec la trace, on trouve $1 + 2\cos(\theta) = -1$, c'est-à-dire $|\theta| = \pi$. L'isométrie u est donc une rotation d'angle π ou encore une symétrie orthogonale par rapport à E_1.

Exercice 2.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $x \in [-A;A] \subset]-1;1[$. On a alors pour $k \geq 1$:

$$|c_k(x)| \;=\; \left|\frac{\cos(kx)x^k}{k}\right| \;\leq\; \left|\frac{x^k}{k}\right| \;\leq\; \left|x^k\right| \;\leq\; A^k$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \left|\frac{x^k\cos(kx)}{k}\right| \leq A^k \\ \text{Les suites sont positives} \\ \sum A^k \text{ converge car c'est une suite géométrique de raison } |A| < 1 \end{cases}$$

D'après le théorème de comparaison, la série définissant C est absolument convergente sur $]-1;1[$, donc convergente. L'application C est donc bien définie sur $]-1;1[$. De plus :

$$|R_n(x)| \underset{\text{def}}{=} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k\sin(kx)}{k}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} A^k \;=\; \frac{A^{n+1}}{1-A}$$

En passant au sup pour x dans $[a,b]$:

$$\|R_n\|_\infty \;\leq\; \frac{A^{n+1}}{1-A} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par théorème d'encadrement, le reste converge uniformément vers 0 et la fonction C est continue sur $]-1;1[$. On raisonne de la même façon sur s_k.

$\boxed{\text{Q2}}$ On va utiliser le théorème de dérivation terme à terme. Il faut donc vérifier les hypothèses. Montrons que sur tout segment $[a,b]$ de $]-1;1[$:

$$\begin{cases} \sum c_k \quad \text{converge simplement} \\ \sum c_k' \quad \text{converge uniformément sur chaque segment} \end{cases}$$

La convergence simple de $\sum c_k$ a été démontré dans la question $Q1$. Soit x et A vérifiant $x \in [a,b] \subset [-A;A] \subset]-1;1[$.

$$|c_k'(x)| \;=\; \left|\frac{kx^{k-1}\cos(kx) - kx^k\sin(kx)}{k}\right| \underset{\text{IT}}{\leq} |x|^{k-1}\Big(|\cos(kx)| + |x||\sin(kx)|\Big) \;\leq\; 2A^{k-1}$$

La série $\sum A^{k-1}$ est convergente puisqu'il s'agit d'une série géomètrique de raison $|A| < 1$. Les séries sont à termes positifs. D'après le théorème de comparaison, la série $\sum c_k'$ est convergente et son reste R_n vérifie :

$$|R_n(x)| \;=\; \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k'(x)\right| \leq 2\sum_{k=n+1}^{\infty} A^{k-1} \;\leq\; 2\frac{|A|^n}{1-|A|}$$

On passe ensuite au sup pour x dans $[a,b]$:

$$\|R_n\|_\infty \;\leq\; 2\frac{|A|^n}{1-|A|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Le reste converge donc uniformément vers 0 et la série $\sum c_k'$ converge uniformément sur tout segment de $[a,b]$. L'application C est dérivable de dérivée :

$$C'(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\cos(kx) - x^k\sin(kx)$$

On raisonne de la même façon sur S et on trouve :

$$S'(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\sin(kx) + x^k\cos(kx)$$

$\boxed{\text{Q3}}$ Comme $|xe^{ix}| = |x| < 1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}e^{ikx} \;=\; e^{ix}\sum_{k=1}^{\infty}\left(xe^{ix}\right)^{k-1} \underset{\mathrm{K=k\text{-}1}}{=} e^{ix}\sum_{K=0}^{\infty}\left(xe^{ix}\right)^{K} \;=\; e^{ix}\frac{1}{1-xe^{ix}}$$

$\boxed{\text{Q4}}$ D'après la question $Q2$, on a :

$$E'(x) \;=\; C'(x)+iS'(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\left(x^{k-1}\cos(kx)-x^{k}\sin(kx)\right) + \sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}\left(i\sin(kx)+x^{k}i\cos(kx)\right)$$

Soit encore :

$$E'(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}e^{ikx}+ix^{k}ie^{ikx} \;=\; (1+ix)\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}e^{ikx} \underset{\mathrm{Q3}}{=} \frac{(1+ix)e^{ix}}{1-xe^{ix}}$$

$\boxed{\text{Q5}}$ Les relations dans le triangle rectangle nous donne la valeur de l'argument. Prenons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a $Arg(j) = \frac{2\pi}{3}$ et :

$$Arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}\right) \;=\; Artan(-\sqrt{3}) \;=\; -\frac{\pi}{3}$$

$\boxed{\text{Q6}}$ On a $L(1) = \ln(1) + iArg(1) = 0$. De plus :

$$1-e^{i} \;=\; e^{\frac{i}{2}}\left(e^{-\frac{i}{2}}-e^{\frac{i}{2}}\right) \;=\; e^{\frac{i}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right) \;=\; e^{i\frac{1-\pi}{2}}\left(2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

On obtient alors :

$$L(1-e^{i}) \;=\; \ln\left(2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right) + i\left(\frac{1-\pi}{2}\right)$$

De même :

$$1+e^{-i} \;=\; e^{-\frac{i}{2}}\left(e^{\frac{i}{2}}+e^{-\frac{i}{2}}\right) \;=\; e^{-\frac{i}{2}}\left(2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

Ainsi :

$$L(1+e^{-i}) \;=\; \ln\left(2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \frac{i}{2}$$

$\boxed{\text{Q7}}$ L'application $L\,o\,f$ est dérivable comme composée de fonctions dérivable et :

$$\begin{aligned}
(L\,o\,f)' &= \left(\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2) + i\arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right)' \\
&= \frac{2aa'+2bb'}{2(a^2+b^2)} + i\frac{\frac{b'a-ba'}{a^2}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \\
&= \frac{aa'+bb'}{a^2+b^2} + i\frac{b'a-ba'}{a^2+b^2} \\
&= \frac{(a-ib)(a'+ib')}{(a-ib)(a+ib)} \\
&= \frac{f'}{f}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q8}}$ Posons $f(x) = -L(1-xe^{ix})$. On a alors en utilisant la question précédente :

$$f'(x) \underset{\mathrm{Q7}}{=} -\frac{-e^{ix}-ixe^{ix}}{1-xe^{ix}} \underset{\mathrm{Q4}}{=} E'(x)$$

De plus $E(0) = 0 = -L(1-0)$. On a donc bien :

$$E(x) \;=\; -L(1-xe^{ix})$$

$\boxed{\text{Q9}}$ Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$|S_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}(-1)^{\varepsilon k}e^{ik}\right| = \left|\frac{1-\left((-1)^{\varepsilon}e^{i}\right)^{n+1}}{1-(-1)^{\varepsilon}e^{i}}\right| \underset{\text{IT}}{\leq} \frac{1+\left|(-1)^{\varepsilon}e^{i}\right|^{n+1}}{|1-(-1)^{\varepsilon}e^{i}|} = M$$

$\boxed{\text{Q10}}$ En remarquant que $S_k - S_{k-1} = (-1)^{\varepsilon k}e^{ik}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{q}\frac{(-1)^{\varepsilon k}e^{ik}}{k} &= \sum_{k=1}^{q}\frac{S_k - S_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{q}\frac{S_k}{k} - \sum_{k=1}^{q}\frac{S_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{q}\frac{S_k}{k} - \sum_{k=0}^{q-1}\frac{S_k}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{q-1}S_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) + \frac{S_q}{q} - S_0
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q11}}$ En utilisant la majoration de (S_n) par M montré à la question $Q9$, on obtient :

$$\begin{cases}
\left|\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)S_k\right| \leq \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)M \\
\text{Les suites sont positives} \\
M\sum\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \text{ est convergente par somme télescopique}
\end{cases}$$

Ainsi, en utilisant le théorème de comparaison des séries numériques, la série $\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)S_k$ est absolument convergente.

$\boxed{\text{Q12}}$ D'après les questions $Q10$ et $Q11$, la série $\sum\frac{(-1)^{\varepsilon k}e^{ik}}{k}$ est convergente. En prenant la partie réelle et en prenant $\varepsilon = 1$ puis $\varepsilon = -1$, on montrer que C est définie en 1, puis en -1. De même en prenant la partie imaginaire, on a le même résultat sur S.

$\boxed{\text{Q13}}$ Étant donné qu'on a convergence uniforme sur $[0,1]$ de C, on peut utiliser le théorème de la double limite. On obtient

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(k)}{k} = Re(E(1)) \underset{\text{Q6}}{=} -Re(L(1-e^{i})) \underset{\text{Q8}}{=} -\ln\left(2\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

On raisonne de la même façon en -1, puis avec S en 1 et -1. On trouve :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k)}{k} &= \tfrac{\pi-1}{2} \\
\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos(k)}{k} &= -\ln\left(2\cos\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) \\
\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin(k)}{k} &= -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$