2020-2021 **Devoir surveillé 5** PSI

Correction

Exercice 1.

$\boxed{\text{Q1}}$ Pour tous x et y de $\mathbb{R}$, on a :

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit n dans $\mathbb{N}$. En utilisant la question 1, on a :

$$2b_n b_{n-1} \leq b_n^2 + b_{n-1}^2 \qquad (*)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
2b_n\left(nb_n - (n-1)b_{n-1}\right) &= 2nb_n^2 - 2(n-1)b_nb_{n-1} \\
&\underset{(*)}{\geq} 2nb_n^2 - (n-1)\left(b_n^2 + b_{n-1}^2\right) \\
&\geq b_n^2(2n-(n-1)) - (n-1)b_{n-1}^2 \\
&\geq (n+1)b_n^2 - (n-1)b_{n-1}^2
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q3}}$ Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$a_n = (a_1 + \ldots + a_n) - (a_1 + \ldots + a_{n-1}) = nb_n - (n-1)b_{n-1}$$

$\boxed{\text{Q4}}$ Soit n dans $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=1}^{N} a_nb_n &\underset{\text{Q3}}{=} \sum_{n=1}^{N} 2b_n\left(nb_n - (n-1)b_{n-1}\right) \\
&\underset{\text{Q2}}{\geq} \sum_{n=1}^{N} (n+1)b_n^2 - (n-1)b_{n-1}^2 \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} nb_n^2 - (n-1)b_{n-1}^2 + \sum_{n=1}^{N} b_n^2 \\
&\underset{\text{ST}}{\geq} Nb_N^2 - 0b_0^2 + \sum_{n=1}^{N} b_n^2 \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} b_n^2
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q5}}$ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ avec n fixé, on obtient :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} a_nb_n\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{N} a_n^2 \sum_{n=1}^{N} b_n^2$$

On utilise ensuite le résultat de la question Q4 :

$$\left(\sum_{n=1}^{N} b_n^2\right)^2 \leq 2\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \sum_{n=1}^{N} b_n^2$$

Si $\sum_{n=1}^{N} b_n^2$ est non nul on simplifie, on obtient alors :

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \leq 2\sum_{n=1}^{N} a_n^2$$

Si $\sum_{n=1}^{N} b_n^2$ est nul, le résultat précédent est évident. Ainsi la série $\sum b_n^2$ est croissante et majoré par $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, elle est donc convergente, et en passant à la limite, on obtient :

$$\|b\|_2 \leq 2\|a\|_2$$

$\boxed{\text{Q6}}$ La série $\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n^{2\alpha}}$ est une série de Riemann avec 2α dans $]1;2[$. Elle est donc convergente et la suite (a_n) est donc bien dans l^2. De plus la fonction f définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante. Ainsi pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

On somme ensuite pour k variant de 1 à $n-1$ pour n fixé dans $\mathbb{N}$. On obtient :

$$\int_1^{n} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} \qquad (*)$$

Or :

$$nb_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

Ainsi, l'équation $(*)$ devient :

$$\left[\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}\right]_1^n \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq nb_n$$

En divisant par n, on obtient :

$$\frac{1}{(1-\alpha)n^\alpha} + \frac{1}{(\alpha-1)n} \leq b_n$$

$\boxed{\text{Q7}}$ Élevons au carré l'inéquation précédente, ce qui est possible car les termes sont positifs :

$$\left(\frac{1}{(1-\alpha)n^\alpha} + \frac{1}{(\alpha-1)n}\right)^2 \leq b_n^2$$

Soit encore :

$$\frac{1}{(1-\alpha)^2 n^{2\alpha}} + \frac{1}{(\alpha-1)^2 n^2} - 2\frac{1}{(1-\alpha)^2 n^{\alpha+1}} \leq b_n^2$$

On multiplie ensuite par $(1-\alpha)^2$ et on somme pour n variant de 1 à $+\infty$:

$$\zeta(2\alpha) + \zeta(2) - 2\zeta(\alpha+1) \leq (1-\alpha)^2\|b\|_2^2 \leq (1-\alpha)^2 C^2 \|a\|_2^2 = (1-\alpha)^2 C^2 \zeta(2\alpha)$$

$\boxed{\text{Q8}}$ En divisant par $\zeta(2\alpha)$ l'inéquation trouvée dans la question précédente, on a :

$$\frac{\zeta(2)}{\zeta(2\alpha)} - 2\frac{\zeta(\alpha+1)}{\zeta(2\alpha)} + 1 \leq (1-\alpha)^2 C^2$$

Il suffit de faire tendre α vers $\frac{1}{2}$ et utiliser la continuité de zéta et sa limite en 1 :

$$0 - 2\times 0 + 1 \leq \frac{1}{2^2} C^2$$

Donc $C \geq 2$.

Exercice 2.

1. La fonction est définie sur $]-\infty, 1[$. Au voisinage de 0, on a $\ln(1-x) = -x - x^2/2 + o(x^2)$ et donc

$$\boxed{x + \ln(1-x) = -x^2/2 + o(x^2)}$$

2. Par concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a (courbe en dessous de sa tangente en 1)

$$\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$$

En appliquant ceci pour $n \geq 2$ à $-1/n$, on obtient

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ u_n \leq 0}$$

3. D'après le développement de la question 1, $u_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ qui est le terme général d'une série absolument convergente. Ainsi

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ est convergente}}$$

4. f est de classe C^∞ sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1],\ f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} \geq 0$$

$$\boxed{f \text{ est croissante sur } [0,1]}$$

5. D'après le développement de la question 1, $v_n \sim \frac{1}{2n^2}$ qui est le terme général d'une série absolument convergente. Ainsi

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} v_n \text{ est convergente}}$$

6. On a $v_1 - u_1 = -\ln(2)$ et

$$\forall n \geq 2,\ v_n - u_n = -\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1-\frac{1}{n}) = -\ln(\frac{n+1}{n}) - \ln(\frac{n-1}{n}) = -\ln(n+1) + 2\ln(n) - \ln(n-1)$$

On en déduit que

$$\sum_{n=1}^{N} (u_n - v_n) = -\ln(2) - \sum_{n=2}^{N} \ln(n+1) + 2\sum_{n=2}^{N} \ln(n) - \sum_{n=2}^{N} \ln(n-1)$$

Les termes se simplifient et on trouve

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} (u_n - v_n) = \ln(N) - \ln(N+1)}$$

7. Avec les questions 3 et 5, les suites proposées convergent (sommes partielles de séries convergentes) et avec la question précédente, la différence vaut $-\ln(1+1/N)$ et est de limite nulle quand $N \to +\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} v_n = \sum_{n\geq 1} u_n}$$

Par négativité de u_n pour $n \geq 2$ (question 2) et positivité de v_n (question 4 qui donne la positivité de f sur $[0,1]$), la suite des sommes partielles de u décroît et celle des sommes partielles de v croît. Ainsi

$$\boxed{(\sum_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (\sum_{n=1}^{N} u_n)_{N\in\mathbb{N}^*} \text{ sont adjacentes}}$$

8. En particulier

$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} v_k \leq \gamma \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Pour $k = 1$, on trouve $\gamma \geq 1 - \ln(2) > 0$ et pour $k = 2$, $\gamma \leq 1 + u_2 < 1$.

$$\boxed{\gamma \in]0,1[}$$

9. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Une comparaison série intégrale donne alors

$$\forall n \geq 2,\ \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t}$$

On en déduit que

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq h_n - 1 \leq \ln(n)$$

et comme $1 - \ln(2) \geq 0$,

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ \ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)}$$

On vérifie que l'encadrement reste vrai si $n = 1$ ($\ln(2) \leq 1 \leq 1$).

10. On calcule

$$f_{n+1} - f_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln(1 - \frac{1}{n+1}) = u_{n+1} \leq 0$$

$$\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

11. On reprend l'identité ci-dessus et on somme :

$$f_N - 1 = f_N - f_1 = \sum_{n=1}^{N-1} u_{n+1} = \sum_{n=1}^{N} u_n - u_1 = \sum_{n=1}^{N} u_n - 1$$

$$\boxed{(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente et de limite } \gamma}$$

12. (a) Fonction décroissante, asymptote verticale en 0 et horizontale ($x = 0$) en $+\infty$.

    (b) Comme $r > 1$, la fonction est intégrable au voisinage de $+\infty$. Etant continue sur $[a, +\infty[$ (car $a > 0$), l'intégrale existe. Une primitive de la fonction est $x \mapsto \frac{1}{1-r}\frac{1}{x^{r-1}}$, on a

$$\boxed{I(a) = \frac{a^{1-r}}{r-1}}$$

(c) i. On applique la définition de limite avec $\varepsilon = \ell - a > 0$ ce qui donne un rang n_1.
On applique la définition de limite avec $\varepsilon = b - \ell > 0$ ce qui donne un rang n_2.
On choisit $N = \max(n_1, n_2)$ et on a pour $n \geq N$ $|n^r(w_{n+1} - w_n) - \ell| \leq \ell - a$ ET $|n^r(w_{n+1} - w_n) - \ell| \leq b - \ell$. Ainsi

$$\boxed{\forall 0 < a < \ell < b,\ \exists N/\ \forall n \geq N,\ a \leq n^r(w_{n+1} - w_n) \leq b}$$

ii. $x \mapsto 1/x^r$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on peut derechef effectuer une comparaison série-intégrale pour obtenir

$$\forall n \geq N,\ \int_N^{n+1} \frac{dt}{t^r} \leq \sum_{k=N}^{n} \frac{1}{k^r} \leq \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{t^r}$$

Avec la question précédente (en divisant par $n^r > 0$ et comme la multiplication par a ou b ne change pas le sens des inégalités)

$$a \int_N^{n+1} \frac{dt}{t^r} \leq \sum_{k=N}^{n} (w_{k+1} - w_k) \leq b \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{t^r}$$

et finalement,

$$\boxed{a \int_N^{n+1} \frac{dt}{t^r} \leq w_{n+1} - w_N \leq b \int_{N-1}^{n} \frac{dt}{r}}$$

iii. On a donc, en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$aI(N) \leq -w_N \leq bI(N-1)$$

ou encore

$$\boxed{-bI(N-1) \leq w_N \leq -aI(N)}$$

iv. Soit $\varepsilon > 0$. On utilise ce qui précède avec $a = \ell - \varepsilon$ et $b = \ell + \varepsilon$. Ceci nous donne un rang N. Tout rang plus grand que N convient aussi et

$$\forall n \geq N,\ -(\ell + \varepsilon)I(n-1) \leq w_n \leq -(\ell - \varepsilon)I(n)$$

On multiplie par $n^{r-1} \geq 0$ ce qui donne

$$\forall n \geq N,\ -(\ell + \varepsilon)I(n-1)(n-1)^{r-1} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{r-1} \leq w_n n^{r-1} \leq -(\ell - \varepsilon)I(n)n^{r-1}$$

Le majorant tend vers $-(\ell - \varepsilon)\frac{1}{r-1}$ et est plus petit que $\frac{-\ell+2\varepsilon}{r-1}$ pour n assez grand.
Le majorant tend vers $-(\ell + \varepsilon)\frac{1}{r-1}$ et est plus grand que $\frac{-\ell-2\varepsilon}{r-1}$ pour n assez grand.
Il existe donc un rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0,\ -\frac{\ell}{r-1} - \frac{2\varepsilon}{r-1} \leq w_n n^{r-1} \leq -\frac{\ell}{r-1} + \frac{2\varepsilon}{r-1}$$

Par définition des limites,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} n^{r-1} w_n = -\frac{\ell}{r-1}}$$

v. $\boxed{\text{Dans le cas où } \ell = 0, \text{ on peut reprendre la preuve}}$. On travaille avec $\varepsilon > 0$ et on trouve un rang à partir duquel

$$-\varepsilon \leq n^r(w_{n+1} - w_n) \leq \varepsilon$$

On somme mais on obtient cette fois

$$-\varepsilon\int_{N-1}^{n}\frac{dt}{t^r}\le w_{n+1}-w_N\le\varepsilon\int_{N-1}^{n}\frac{dt}{t^r}$$

et donc

$$-\varepsilon I(N-1)\le w_N\le\varepsilon I(N-1)$$

On conclut alors encore que $n^{r-1}w_n\to 0$.

13. Posons $w_n=\gamma-f_n$ (à partir du rang 1). On a alors $w_n\to 0$ (question 11) et (questions 10 et 3)

$$w_{n+1}-w_n=f_n-f_{n+1}=-u_{n+1}\sim\frac{1}{2n^2}$$

Ainsi, $n^2(w_{n+1}-w_n)\to\frac{1}{2}$. La question 12 donne alors $nw_n\to-\frac{1}{2}$ et donc $w_n\sim-\frac{1}{2n}$. On a alors

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}$$

Exercice 3

1. (a) Par définition du produit matriciel, le coefficient à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de AB est le produit scalaire de la ligne i de A et de la colonne j de B. Ainsi

$$\boxed{({}^tMM)_{i,j}=\langle v_i,v_j\rangle}$$

(b) Dans le cas om la famille $(v_1,\dots,v_n)$ est orthogonale, ${}^tMM$ est diagonale et son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux. Ainsi

$$\det(M)^2=\det({}^tMM)=\prod_{i=1}^{n}\|v_i\|^2$$

Il reste à passer à la racine carrée pour conclure que

$$\boxed{|\det(M)|=\|v_1\|\|v_2\|\dots\|v_n\|}$$

2. Une matrice orthogonale est une matrice dont les colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Ainsi les matrices dans $M_n(\mathbb{R})$ qui sont diagonales et orthogonales sont

$$\boxed{\text{les matrices diagonales à coefficients diagonaux dans } \{1,-1\}}$$

3. Une première fonction prend en argument deux listes supposées de même taille et renvoie leur produit scalaire.

```
def prodscal(U,V):
    s=0
    for i in range(len(U)):
        s=s+U[i]*V[i]
    return s
```

La fonction principale prend en argument une liste de listes. Dans une première double boucle, on vérifie que les coefficients valent tous 1 ou -1. Dans une seconde que les produits scalaires de deux colonnes différentes est nul. Si aucune interruption n'a eu lieu, on renvoie 1.

```
def estdansH(M):
    n=len(M)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if abs(M[i][j])!=1:
                return 0
    for i in range(n):
        for j in range(i+1,n):
            if prodscal(M[i],M[j])!=0:
                return 0
    return 1
```

4. (a) Tous les coefficients étant de carré égal à 1

$$\boxed{\text{Les colonnes de } M \in \mathcal{H}_n \text{ sont de norme } \sqrt{n}}$$

(b) Le déterminant étant multilinéaire, si les v_i sont tous non nuls

$$\det(v_1, \dots, v_n) = \prod_{i=1}^{n} \|v_i\| \det(v_1/\|v_1\|, \dots, v_n/\|v_n\|)$$

Si $(v_1, \dots, v_n)$ est orthogonale, le dernier déterminant est celui d'une matrice orthogonale (colonnes orthogonales et normées) son déterminant vaut 1 ou -1. Ainsi

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{H}_n,\ |\det(M)| = n^{\frac{n}{2}}}$$

5. On a

$$\forall i \geq 1,\ 0 = \langle v_1, v_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} m_{j,i}$$

Or, la dernière somme est la différence du nombre de 1 et du nombre de -1. Ainsi

$$\boxed{\text{le nombre des } m_{j,i} \text{ égaux à 1 est égal au nombre de } m_{j,i} \text{ égaux à } -1.}$$

6. Multiplier une ligne ou ou colonne de M conserve l'appartenance à $\mathcal{H}_n$ (les produits scalaires sont inchangés ou transformés en leur opposé). En multipliant pour tout i la ligne i de $M \in \mathcal{H}_n$, on trouve un élément de $\mathcal{H}_n$ dont la première colonne est constituée uniquement de 1.

7. On suppose $\mathcal{H}_n$ non vide et on considère $M_0 \in \mathcal{H}_n$ de première colonne v_1 comme ci-dessus. En faisant le produit scalaire des deux premières colonnes, qui est nul, on voit alors que la deuxième colonne contient autant de 1 que de -1. Ainsi

$$\boxed{\text{si } \mathcal{H}_n \neq \emptyset \text{ alors } n \text{ est pair}}$$

8. (a) A toutes les colonnes, on ajoute la première. M_0 est transformée en une matrice dont les coefficients sur les colonnes $2, \dots, n$ valent 0 ou 2. Chacune de ces colonnes est factorisable par 2 et on trouve $\det(M_0) = 2^{n-1} \det(A)$ où A est une matrice dont les coefficients valent 0 ou 1 et sont donc entiers. Le déterminant étant une somme de produit des coefficients, $\det(A) \in \mathbb{Z}$. Ainsi

$$\boxed{\det(M_0) \text{ est un entier relatif multiple de } 2^{n-1}}$$

(b) n étant pair, il s'écrit $n = 2p$ (avec $p \geq 2$ car $n > 2$). Avec 4(b) et 8(a), $(2p)^p$ est mutiple de 2^{2p+1}.
Si, par l'absurde, p est impair alors $(2p)^p = 2^p p^p$ n'est pas factorisable par 2^{p+1} (car p^p est impair). Ainsi $p + 1 > 2p + 1$ et donc $p < 0$ ce qui est une contradiction. p est ainsi pair et donc

$$\boxed{n \text{ est un entier naturel multiple de 4}}$$