2020-2021 # Devoir surveillé 4 PSI

Correction

" *La cerise sur le gâteau passe inaperçu lorsqu'elle est déposée sur un gâteau aux cerises.*"

Marie-Océane, Teddy, Adrien.

Exercice 1.

Cf Exercices

Exercice 2.

$\boxed{\text{Q1}}$ L'intégrale I est impropre en 0 et en $+\infty$. En 0, l'intégrale est faussement impropre donc convergente car :

$$\frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2} \underset{0}{\sim} t\ln(t) \xrightarrow[x\to 0]{\text{CC}} 0$$

En $+\infty$, on a :

$$t^2.\frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2} \xrightarrow[x\to +\infty]{\text{CC}} 0$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \dfrac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right) \\ \text{Les fonctions sont positives} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \text{ converge} \end{cases}$$

D'après le théorème de comparaison, l'intégrale I converge en $+\infty$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Posons $F(t) = \dfrac{1}{t(1+t^2)}$. En évaluant $tF(t)$ en 0, on trouve $a = 1$. En évaluant $(1+t^2)F(t)$ en i, on a :

$$\frac{1}{i} = 0 + (bi + c) \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = -1 \quad \text{et} \quad c = 0$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}$$

$\boxed{\text{Q3}}$ En utilisant la question précédente, on a :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}dt = \int_\varepsilon^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_\varepsilon^{+\infty} = \left[\ln\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\right]_\varepsilon^{+\infty} = -\ln\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right)$$

$\boxed{\text{Q4}}$ Pour calculer I_ε, effectuons une intégration par partie en posant :

$$\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(t) & \qquad & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\ v(t) & = & -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t^2} & & v'(t) & = & \dfrac{t}{(1+t^2)^2} \end{array}$$

Les fonctions sont C^1 et le crochet :

$$\left[-\frac{\ln(t)}{2(1+t^2)}\right]_\varepsilon^{+\infty} \underset{\text{CC}}{=} \frac{\ln(\varepsilon)}{2(1+\varepsilon^2)}$$

converge. On peut effectuer l'intégration par partie généralisée. On obtient :

$$I_\varepsilon = \frac{\ln(\varepsilon)}{2(1+\varepsilon^2)} + \frac{1}{2}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}dt$$

On utilise ensuite le résultat de la question précédente :

$$I_\varepsilon = \frac{\ln(\varepsilon)}{2(1+\varepsilon^2)} - \frac{1}{2}\ln(\varepsilon) + \frac{1}{4}\ln(1+\varepsilon^2)$$

$\boxed{\text{Q5}}$ Tout d'abord :

$$\frac{\ln(\varepsilon)}{2(1+\varepsilon^2)} - \frac{1}{2}\ln(\varepsilon) = \frac{\ln(\varepsilon)}{2}\left(\frac{1}{1+\varepsilon^2} - 1\right) \underset{0}{\sim} -\frac{\ln(\varepsilon)}{2}\varepsilon^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{CC}} 0$$

Ainsi :

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 0$$

$\boxed{\text{Q6}}$ Posons le changement de variable C^1 et strictement décroissant sur $\mathbb{R}_+^*$ $T = \frac{1}{t}$. On obtient :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt = -\int_{+\infty}^{0} \frac{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{1}{T}\right)}{\left(1+\left(\frac{1}{T}\right)^2\right)^2}\frac{dT}{T^2} = \int_0^{+\infty}\frac{T\ln\left(\frac{1}{T}\right)}{(T^2+1)^2}dT = -I$$

Ainsi $I = 0$.

Exercice 3.

Cf cours.

Exercice 4.

$\boxed{\text{Q1}}$ Puisque :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+t^4} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^4} \\ \text{Les fonctions sont positives} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}dt \text{ converge} \end{cases}$$

on peut utiliser le théorème de comparaison. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}dt$ est convergente et donc I aussi. Pour J, on raisonne de la même façon en utilisant : $\dfrac{t^2}{1+t^4} \sim \dfrac{1}{t^2}$

$\boxed{\text{Q2}}$ Calculons K :

$$K = \int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+2}dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$\boxed{\text{Q3}}$ La fonction $f(t) = t - \dfrac{1}{t}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est $f'(t) = 1 + \dfrac{1}{t^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissant de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On on donc effectuer le changement de variable $T = t - \dfrac{1}{t}$. On a alors :

$$dT = 1 + \frac{1}{t^2}dt = \frac{1+t^2}{t^2}dt \qquad\qquad T^2 + 2 = \left(t - \frac{1}{t}\right)^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2 + 2 = \frac{1+t^4}{t^2}$$

Ainsi :

$$I + J = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4}dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\frac{1+t^2}{t^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+T^2}dT$$

Enfin en utilisant la parité de la fonction $t \mapsto \frac{1}{2+t^2}$, on obtient :

$$I + J = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{2+T^2}dT = 2K$$

$\boxed{\text{Q4}}$ Effectuons le changement de variable $T = \frac{1}{t}$ qui est C^1 et strictement décroissant dans l'intégrale I :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}dt = -\int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+\frac{1}{T^4}}\frac{dT}{T^2} = -\int_{+\infty}^{0} \frac{T^2}{1+T^4}dT = J$$

Ainsi d'après la question $Q3$, $I + I = 2K$, donc $I = K$. Comme K a déjà été calculé dans la question $Q2$, on a :

$$I = J = K = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$\boxed{\text{Q5}}$ Calculons la dérivée de f :

$$f'(x) = \frac{2}{\delta}\frac{\frac{2a}{\delta}}{1 + \left(\frac{2ax+b}{\delta}\right)^2} = \frac{2}{\delta}\frac{2a\delta}{\delta^2 + (2ax+b)^2} = \frac{4a}{-\Delta + (4a^2x^2 + b^2 + 4abx)}$$

En remplçant Δ par $b^2 - 4ac$, on obtient :

$$f'(x) = \frac{4a}{-b^2 + 4ac + 4a^2x^2 + b^2 + 4abx} = \frac{4a}{4ac + 4a^2x^2 + 4abx} = \frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{P}$$

$\boxed{\text{Q6}}$ Ainsi les primitives de $\frac{1}{P}$ sont :

$$\int \frac{1}{P} = \frac{2}{\delta}arctan\left(\frac{2ax+b}{\delta}\right) + Cst$$

$\boxed{\text{Q7}}$ On peut très bien décomposer sur $\mathbb{C}$ en utilisant les racines $4^{\text{ième}}$ de -1 puis regrouper les racines conjuguées. Ici il est plus rapide d'utiliser l'astuce suivante :

$$X^4 + 1 = \left(X^2+1\right)^2 - 2X^2 = \left(X^2 + 1 - \sqrt{2}X\right)\left(X^2 + 1 + \sqrt{2}X\right)$$

$\boxed{\text{Q8}}$ Comme $x \mapsto \frac{1}{1+x^4}$ est paire, on a :

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{\gamma x + \delta}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} = \frac{-\alpha x + \beta}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{-\gamma x + \delta}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

Par unicité de la décomposition en éléments simples, on peut identifier. On obtient $\alpha = -\gamma$ et $\beta = \delta$.

$\boxed{\text{Q9}}$ D'après la question précédente, on a :

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{-\alpha x + \beta}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}$$

En prenant $x = 0$, on a $1 = 2\beta$, donc $\beta = \frac{1}{2}$. Puis en prenant $x = \sqrt{2}$, on obtient :

$$\frac{1}{4+1} \;=\; \frac{\alpha\sqrt{2}+\beta}{2+2+1} + \frac{-\alpha\sqrt{2}+\beta}{2-2+1}$$

Soit encore, en remplaçant β par $\frac{1}{2}$ et en multipliant par 10 :

$$2 \;=\; 2\alpha\sqrt{2}+1 \;-\; 10\alpha\sqrt{2}+5$$

On trouve alors $\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ comme demandé par l'énoncé.

$\boxed{\text{Q10}}$ Les polynômes $x^2+\sqrt{2}x+1$ et $x^2-\sqrt{2}x+1$ ont un Δ strictement négatif égal à -2. On a donc d'après la question $Q6$ une primitive de l'inverse de ces polynômes. On obtient :

$$J_+ \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} \;=\; \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty} \;=\; \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \;=\; \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

et

$$J_- \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} \;=\; \frac{2}{\sqrt{2}}\left[\arctan\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{+\infty} \;=\; \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \;=\; \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

$\boxed{\text{Q11}}$ En utilisant le résultat de la question $Q8$, on a :

$$I \;=\; \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)dx$$

Soit encore :

$$I \;=\; \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\left[\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right) - \ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\right]_0^{+\infty} \;+\; \sqrt{2}J_+ \;+\; \sqrt{2}J_-\right)$$

Enfin, en remplaçant J_+ et J_- par leurs valeurs et en remarquant que la limite du crochet en $+\infty$ est nul :

$$I \;=\; \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(0 \;-\; 0 \;+\; \frac{\pi}{2} \;+\; \frac{3\pi}{2}\right) \;=\; \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 5.

$\boxed{\text{Q1}}$ Pour tous a et b de $\mathbb{R}$:

$$2a^2+2b^2-(a+b)^2 \;=\; 2a^2+2b^2-a^2-b^2-2ab \;=\; a^2+b^2-2ab \;=\; (a-b)^2 \;\geq\; 0$$

L'inégalité est donc vérifiée.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition de E,
- E est non vide car la suite nulle est dans E,
- Il reste à montrer que E est stable par combinaison linéaire. Soient λ, μ dans $\mathbb{R}$ et (x_n), (y_n) dans E :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ (\lambda x_n+\mu y_n)^2 \;\leq\; \lambda^2 x_n^2+\mu^2 y_n^2 & \text{d'après la question } Q1 \\ \text{Les suites sont positives} & \\ \sum \lambda^2 x_n^2+\mu^2 y_n^2 & \text{est convergente car les suites } x \text{ et } y \text{ sont dans } E \end{cases}$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison, la série $\sum(\lambda x_n+\mu y_n)^2$ est convergente ce qui signifie que la suite $(\lambda x_n+\mu y_n)$ est dans E. L'ensemble E est donc bien un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrons que $\| \ \|$ est une norme sur E.

- La série $\sum x_i^2$ est convergente pour toute suite (x_n) de E par définition de E.
- De plus, pour x dans E :

$$\|x\| = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in \mathbb{N},\ x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

En effet, une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls.

- Vérifions homogénéité. Soit λ dans $\mathbb{R}$ et x dans E :

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} (\lambda x)^2} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\sum_{i=0}^{+\infty} (\lambda x)^2} = |\lambda|\|x\|$$

- Enfin, il reste l'inégalité triangulaire. Soit x et y dans E. En utilisant l'inégalité triangulaire de la norme 2 sur $\mathbb{R}^n$ (A redémontrer ?), on a :

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=0}^{n} y_i^2}$$

Il suffit de faire tendre n vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Calculons la norme de ces suites :

$$\begin{aligned}
\|a\|^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \\
\|b\|^2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n!}}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e
\end{aligned}$$

Ainsi les suites (a_n) et (b_n) sont dans E de normes respectives $\sqrt{\frac{4}{3}}$ et $\sqrt{e}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrons que f et g sont des applications linéaires. Soient a, b dans E et λ, μ dans $\mathbb{R}$.

$$f(\lambda a + \mu b) = (\lambda a + \mu b)_0 = \lambda a_0 + \mu b_0 = \lambda f(a) + \mu f(b)$$

Pour l'application g, remarquons tout d'abord que $g(a)$ est bien dans E. En effet si a est dans E, alors (a_{n+1}) est aussi dans E et la somme reste dans E puisque E est un espace vectoriel. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g(\lambda a + \mu b)_n = (\lambda a + \mu b)_n + (\lambda a + \mu b)_{n+1} = \lambda(a_n + a_{n+1}) + \mu(b_n + b_{n+1}) = \lambda g(a)_n + \mu g(b)_n$$

$\boxed{\text{Q6}}$ Pour le sens direct, supposons que f soit λ-lipschitzienne. On a alors :

$$\forall x, y \in F_1,\quad N_2(f(x) - f(y)) \leq N_1(x - y)$$

En prenant $y = 0$, on trouve l'inéquation demandée. Pour la réciproque, supposons que f vérifie :

$$\forall X \in F_1,\quad N_2(f(X)) \leq N_1(X)$$

On peut alors remplacer X par $x - y$ avec x et y quelconques. On a alors :

$$\forall x, y \in F_1,\quad N_2(f(x) - f(y)) = N_2(f(x - y)) \leq N_1(x - y)$$

L'équivalence est alors démontrée.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrons que f est 1-lipschitzienne. Soit a dans E,

$$|f(a)| = |a_0| = \sqrt{a_0^2} \leq \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots} = \|a\|$$

D'après la question Q6, l'application linéaire f est 1-lipschitzienne, donc continue.

$\boxed{\text{Q8}}$ Montrons que g est lipschitzienne. Soient a dans E,

$$\|g(a)\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + a_{n+1})^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n^2 + 2a_{n+1}^2 = 2\|(a_n)\|^2 + 2\|(a_{n+1})\|^2$$

en utilisant l'inéquation $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ pour tous a et b de $\mathbb{R}$, démontrée à la question $Q1$. Ensuite en remarquant que :

$$\|(a_{n+1})\|^2 = \|(a_n)\|^2 - a_0^2 \leq \|(a_n)\|^2$$

On obtient :

$$\|g(a)\|^2 \leq 4\|a\|^2$$

Ainsi d'après la question $Q6$, l'application linéaire g est 2-lipschitzienne, donc continue.