2020-2021 **Devoir surveillé 4 - Version difficile** PSI

Correction

Exercice.

Q1.1 En utilisant l'inégalité de Minkovski dans $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p = \left(\|u\|_p+\|v\|_p\right)^p$$

Ainsi la série $\sum|a_i+b_i|^p$ est croissante et majoré par $\left(\|u\|_p+\|v\|_p\right)^p$, elle est donc convergente. La suite (u_i+v_i) est donc bien dans l^p.

Q1.2 Montrons que l^p est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

- $l^p \subset \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ par définition.
- l^p est non vide car la suite nulle est dans l^p car la série nulle est convergente.
- l^p est stable par somme d'après la question précédente.
- Montrons que l^p est stable par la loi externe :

$$(a_n)\in l^p \implies \sum|a_n|^p \text{ cvg} \implies |\lambda|^p\sum|a_n| \text{ cvg} \implies \sum|\lambda a_n|^p \text{ cvg} \implies (\lambda a_n)\in l^p$$

Montrons que l^∞ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$.

- $l^\infty \subset \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ par définition.
- l^∞ est non vide car la suite nulle est bornée.
- Montrons que l^∞ est stable par CL. Soient λ,μ dans $\mathbb{R}$ et (a_n) et (b_n) des suites bornées respectivement par des réels A et B. On a alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |\lambda a_n+\mu b_n| \leq |\lambda||a_n|+|\mu||b_n| \leq |\lambda|A+|\mu|B$$

  Ainsi la suite $(\lambda a_n+\mu b_n)$ est encore dans l^∞.

Q1.3 Montrons que $\| \ \|_p$ est une norme sur l^p.

- Si $\|a\|_p=0$ alors $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p = 0$. On a une somme de termes positifs nuls, tous les termes sont donc nuls. Ainsi $a=0$.
- Soit a dans l^p.

$$\|\lambda a\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\|a\|_p$$

- Pour l'inégalité triangulaire, il suffit de passer à la limite dans l'inégalité de Minkovski de $\mathbb{R}^n$. Les séries considérées sont convergentes d'après la question $Q1.1$

Montrons que $\| \ \|_\infty$ est une norme sur l^∞.

- Si $\|a\|_\infty=0$ alors $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}}|a_n| = 0$. Ainsi $a=0$.
- Soit a dans l^∞.

$$\|\lambda a\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}}|\lambda a_n| = |\lambda|\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}}|a_n| = |\lambda|\|a\|_\infty$$

- Soient a et b dans l^∞, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n + b_n| \ \leq\ |a_n| + |b_n| \ \leq\ \|a\|_\infty + \ \|b\|_\infty$$

En passant au sup pour n dans $\mathbb{N}$, on obtient :

$$\|a+b\|_\infty \ \leq\ \|a\|_\infty + \ \|b\|_\infty$$

$\boxed{\text{Q2.1}}$ La fonction $f(x) = a^x = e^{x\ln(a)}$ est croissante si $a \geq 1$ et décroissante si $0 < a \leq 1$. Avec k dans $\mathbb{N}$, posons $a = \frac{|x_k|}{\|x\|_q} \leq 1$. La fonction f est donc décroissante et comme $p \leq q$:

$$\left(\frac{|x_k|}{\|x\|_q}\right)^p \geq \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_q}\right)^q$$

$\boxed{\text{Q2.2}}$ En sommant l'inéquation trouvée en $Q2.1$ pour k variant dans $\mathbb{N}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k|^p}{\|x\|_q^p} \ \geq\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k|^q}{\|x\|_q^q} \qquad \iff \qquad \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_q^p} \geq \frac{\|x\|_q^q}{\|x\|_q^q} \ =\ 1 \qquad \iff \qquad \|x\|_p \ \geq \|x\|_q$$

Enfin pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$|x_k|^q \ \leq\ \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^q \ =\ \|x\|_q^q$$

En prenant la racine $q^{\text{ième}}$ et en passant au sup, on trouve $\|x\|_\infty \leq \|x\|_q$.

$\boxed{\text{Q3.1}}$ Soit p dans $\mathbb{N}$ et x dans l^p. La série $\sum |x_n|^p$ est donc convergente. Le terme général $|x_n|^p$ tend alors vers 0, et la suite (x_n^p) est donc bornée. La suite x est donc également bornée.

$\boxed{\text{Q3.2}}$ Démontrons tout d'abord la relation. Soit k dans $\mathbb{N}$.

$$|u_k| \ \leq\ \|u\|_\infty \qquad \Longrightarrow \qquad |u_k|^{q-p} \ \leq\ \|u\|_\infty^{q-p} \qquad \Longrightarrow \qquad |u_k|^q \ =\ |u_k|^{q-p}|u_k|^p \ \leq\ \|u\|_\infty^{q-p}|u_k|^p \qquad (*)$$

Prenons u dans l^p. Comme les suites $(|u_k|^p)$ et $(|u_k|^q)$ sont à termes positifs et que la série $\sum |u_k|^p$ est convergente, l'inéquation $(*)$ nous permet d'utiliser le théorème de comparaison. La série $\sum |u_k|^q$ est alors convergente et u est dans l^q. On a bien $l^p \subset l^q$.

Problème.

Corrigé de l'épreuve Mathématiques II, CCMP 2017, filière PC.
Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Avertissements : *ceci n'est pas LE corrigé mais UN corrigé.*
Il y a dans tous mes corrigés des erreurs potentielles ou des choses qui ne vous sembleront pas claires...me contacter le cas échéant !

(1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k\geq 0} \frac{\lambda^k}{k!}$ est convergente de somme e^λ. Pour $x \in \mathbb{R}$ et donc *a fortiori* pour $x > 0$, la quantité $R_n(x)$ est le reste d'ordre n de la série précédente avec $\lambda = nx$: il est donc bien défini. De plus

$$\underline{T_n(x) + R_n(x)} = \sum_{k\geq 0} \frac{(nx)^k}{k!} \underline{= e^{nx}}.$$

(2) La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n appliqué entre 0 et x à la fonction (de classe $\mathcal{C}^\infty$) $f\ : t \mapsto e^{nt}$ s'écrit

$$e^{nx} = f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt}\,\mathrm{d}t.$$

En effectuant le changement de variables $u = x - t$ dans le terme intégral, on en déduit

$$\underline{R_n(x)} = e^{nx} - T_n(x) = \int_x^0 \frac{u^n}{n!} n^{n+1} e^{n(x-u)}\,(-\mathrm{d}u) = \frac{e^{nx} n^{n+1}}{n!} \int_0^x u^n e^{-nu} \mathrm{d}u \underline{= e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u}.$$

(3) On a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2} y^{n+1} n!}{(n+1)! n^{n+1} y^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} y = y \exp\left((n+1)\ln(1+1/n)\right).$$

Or,

$$(n+1)\ln(1+1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

donc $\lim_{n\to+\infty} (n+1)\ln(1+1/n) = 1$ et par continuité de l'exponentielle au point 1, on en déduit que

$$\underline{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ye.}$$

Si $y < e^{-1}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ et par le critère de d'Alembert que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$.

(4) La fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est dérivable de dérivée $u \mapsto (1-u)e^{-u}$. Elle est donc strictement croissante sur $[0,1]$. Pour $x \in]0,1[$, on en déduit que

$$M = \sup_{u\in[0,x]} ue^{-u} = xe^{-x} < 1 \times e^{-1} = e^{-1}.$$

On en déduit que

$$0 \leq R_n(x) \leq e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} M^n.$$

D'après la question précédente, et comme $M < e^{-1}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+1}}{n!} M^n = 0$ et donc bien que $\boxed{R_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{nx})}$.

De là, pour $x \in]0,1[$,

$$T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} + o(e^{nx}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}.$$

(5) Immédiat par récurrence et intégration par parties, et hyper classique !

(6) On a
$$T_n(x) = e^{nx} - e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^x (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u.$$
Or, et d'après la question précédente :
$$\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} u^n e^{-nu} \,\mathrm{d}u \underset{t=nu}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n^n} e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{n} = \frac{1}{n^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \,\mathrm{d}t = \frac{n!}{n^{n+1}}.$$
On en déduit que
$$\underline{T_n(x)} = e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\left(\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u - \int_0^x (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u\right) \underline{= e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty} (ue^{-u})^n \,\mathrm{d}u.}$$

(7) Suivons l'indication de l'énoncé en commençant par la justifier : la fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit que pour $x > 1$ et pour $u \geq x$, on a $ue^{-u} \leq xe^{-x}$. On en déduit que
$$(ue^{-u})^n = (ue^{-u})^{n-1} \times ue^{-u} \leq (xe^{-x})^{n-1} \times ue^{-u}.$$
De là
$$0 \leq T_n(x) \leq e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}(xe^{-x})^{n-1}\int_x^{+\infty} ue^{-u} \,\mathrm{d}u = e^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}(xe^{-x})^{n} \times \frac{1}{xe^{-x}}\int_x^{+\infty} ue^{-u} \,\mathrm{d}u.$$
Or, comme $x > 1$, $xe^{-x} < 1 \times e^{-1} = e^{-1}$, en appliquant à nouveau (3), il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{n+1}}{n!}(xe^{-x})^n = 0$ et donc par domination $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x)e^{-nx} = 0$ et finalement $\boxed{T_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{nx})}$.

(8) La fonction f est dérivable sur $[-1, 1]$ et possède un maximum en $0 \in]-1, 1[$. On en déduit que $\boxed{f'(0) = 0}$.
On a alors, d'après la formule de Taylor-Young en 0 :
$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$
et donc
$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{x^2} \times \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$$
puis
$$\underline{\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \frac{1}{2}}.$$

(9) La fonction φ est continue sur $]-1, 1[$ et à valeurs > 0 : c'est clair sur $]-1, 1[\setminus\{0\}$ car $f(x) \in]0, 1[$ si $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$ et c'est aussi clair en 0 puisque $\varphi(0) = 1/2$. Mais comme $]-1, 1[$ n'est pas un segment, il faut examiner le comportement de φ lorsque x tend vers 1 et -1 afin de conclure correctement.

- Si $f(-1) > 0$, alors φ se prolonge par continuité en -1 et $\varphi(-1) = -\ln\big(f(-1)\big) > 0$. La fonction φ est alors continue sur le segment $[-1, 0]$ et à valeurs > 0, elle y possède donc un minimim > 0.
- Si $f(-1) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to -1} \varphi(x) = +\infty$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que φ est à valeurs ≥ 2 sur $]-1, -1+\delta]$. Sur le segment $[-1+\delta, 0]$, la fonction φ est alors continue et à valeurs > 0 donc y possède un minimum $c > 0$. On a alors $\varphi \geq \min(2, c) > 0$ sur $[-1, 0]$.

Dans les deux cas, φ est minorée sur $]-1, 0]$ par un réel > 0. Le même raisonnement vaut lorsque x tend vers 1 et donc sur $[0, 1[$.
<u>On a bien montré que φ est minorée par un réel > 0 sur $]-1, 1[$.</u>
Soit $\alpha > 0$ tel que $\varphi(x) \geq \alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Alors $\ln\big(f(x)\big) \leq -\alpha x^2$ et par croissance de l'exponentielle,
$$\forall x \in]-1, 1[\,, f(x) \leq e^{-\alpha x^2}.$$

Par continuité de f et passage à la limite dans cette inégalité, on en déduit que

$$\underline{\forall x \in [-1,1],\ f(x) \leq e^{-\alpha x^2}}.$$

(10) La fonction g_n est bien définie car $u/\sqrt{n} \in [-1,1]$ lorsque $u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ et est bien continue par morceaux car f est continue sur $[-1,1]$. Puis, $u \in \mathbb{R}$ étant fixé, on a $u \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}]$ pour n assez grand, donc, pour n assez grand,

$$g_n(u) = \exp\left(n \ln\left(f(u/\sqrt{n})\right)\right) = \exp\left(n \ln\left(1 - u^2/2n + o(1/n)\right)\right) = \exp\left(-u^2 n/2n + o(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-u^2/2}.$$

On a bien montré que $\underline{\text{la suite } (g_n)_{n\geq 1} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers la fonction } u \mapsto e^{-u^2/2}}$.

(11) On a de plus, d'après (9)

$$0 \leq g_n(u) \leq \left(e^{-au^2/n}\right)^n = e^{-au^2}.$$

Cette domination est indépendante de n et la dominante est intégrable. D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} g = \sqrt{2\pi}.$$

Or,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n = \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(f(u/\sqrt{n})\right)^n \mathrm{d}u \underset{x=u/\sqrt{n}}{=} \int_{-1}^{1} \left(f(x)\right)^n \sqrt{n}\,\mathrm{d}x = \sqrt{n} \int_{-1}^{1} \left(f(x)\right)^n \mathrm{d}x.$$

On a donc bien

$$\underline{\int_{-1}^{1} \left(f(x)\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}.$$

Par parité de la fonction g, on a

$$\int_0^{+\infty} g = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} g = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et le même raisonnement en passant à la limite dans la suite d'intégrales $\left(\int_0^{+\infty} g_n\right)_{n\geq 1}$ donne de suite

$$\underline{\int_0^{1} \left(f(x)\right)^n \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}.$$

(12) On a, par Chasles,

$$I_n + J_n = \int_{-1}^{+\infty} (x+1)^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x \underset{u=x+1}{=} \int_0^{+\infty} u^n e^{-nu+n}\,\mathrm{d}u = e^n \int_0^{+\infty} u^n e^{-nu}\,\mathrm{d}u \underset{t=nu}{=} e^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{n^n} e^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{n} \underset{(5)}{=} e^n \frac{n!}{n^{n+1}}$$

et donc $\boxed{n! = e^{-n} n^{n+1}(I_n + J_n)}$.

(13) La fonction $x \mapsto x\ln(2) - \ln(x+1)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ de dérivée égale à $x \mapsto \ln 2 - \dfrac{1}{x+1}$. Or, pour $x \geq 1$,

$$\ln 2 - \frac{1}{x+1} \geq \ln 2 - \frac{1}{2} > 0.$$

La fonction $x \mapsto x\ln(2) - \ln(x+1)$ est donc croissante sur $[1, +\infty[$. Etant nulle en $x = 1$, on a donc

$$\forall x \geq 1,\ x\ln(2) \geq \ln(x+1)$$

et donc

$$\forall x \geq 1, 2^x \geq x + 1.$$

On en déduit que

$$\underline{0 \leq J_n \leq} \int_1^{+\infty} 2^{nx} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} e^{n(\ln 2 - 1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{n(\ln(2)-1)}}{n(1-\ln(2))} = \underline{\left(\frac{2}{e}\right)^n \frac{1}{n(1-\ln(2))}}.$$

(14) Considérons la fonction $x \mapsto f(x) = (x+1)e^{-x}$. Elle est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$, à valeurs > 0 sur $]-1,1]$, de dérivée égale à $x \mapsto -xe^{-x}$. Elle possède un maximum en 0 où elle vaut bien 1 et on aussi $f''(0) = -1$. On en déduit que

$$\underline{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}}.$$

(15) Comme $2/e < 1$, on déduit de (13) et (14) que $J_n = o(I_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Et donc de (12) que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n} n^{n+1} I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n} n^{n+1} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n n \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}.$$

(16) En (2), on a vu que

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt}\,\mathrm{d}t.$$

On a donc

$$R_n(1) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} n^{n+1} e^{nt}\,\mathrm{d}t = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt}\,\mathrm{d}t.$$

(17) La fonction $t \mapsto (1-t)e^t$ vérifie elle aussi toutes les hypothèses pour appliquer Laplace et on a donc, d'après (11)

$$\int_0^1 (1-t)^n e^{nt}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Puis à l'aide de Stirling :

$$\underline{R_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim}} \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{n^{n+1}}{\sqrt{2n\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \underline{\frac{e^n}{2}}.$$

De là,

$$T_n(1) = e^n - R_n(1) = e^n\left(1 - R_n(1)e^{-n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}.$$

(18) *Solution par Romain Krust.* Voici deux solutions, rédigées en python. On prend en compte le fait que les listes python sont indexées à partir de 0. Dans la première, outre l'opérateur `in`, on s'autorise l'utilisation du "slicing" (`L[a:b]` renvoie la liste extraite de `L` dont les indices sont dans l'intervalle $[\![a, b[\![$). On l'évite dans la seconde au prix d'une d'une boucle supplémentaire (l'opérateur `in` est alors sans pertinence) :

```
def X(liste):
    n = len(liste) -1
    for k in range(1, n+1):
        if liste[k] in liste[0:k]:
            return k+1
```

```
def X(liste):
    n = len(liste) -1
    for k in range(1, n+1):
        for j in range(0, k):
            if liste[j] == liste[k]:
                return k+1
```

(19) Pour $k \in [\![2, n+1]\!]$, l'événement $(X = k)$ contient l'événement $(U_1 = 1, U_2 = 2, \ldots, U_{k-1} = k-1, U_k = 1)$ et ce dernier événement est de probabilité égale à $1/n^k$ par indépendance des U_j. On a donc $\mathbf{P}(X = k) \geq 1/n^k$ et *a fortiori*, $\boxed{\mathbf{P}(X = k) \neq 0}$.

(20) D'après la question précédente, $\mathbf{P}(X > k) > 0$ pour $k \leq n$ et on a

$$\mathbf{P}(X > k+1 \mid X > k) = \frac{\mathbf{P}\big((X > k+1) \cap (X > k)\big)}{\mathbf{P}(X > k)}.$$

Or, $(X > k+1) \subset X > k)$ donc $(X > k+1) \cap (X > k) = (X > k+1)$ et donc

$$\mathbf{P}(X > k+1 \mid X > k) = \frac{\mathbf{P}(X > k+1)}{\mathbf{P}(X > k)}$$

soit encore

$$\mathbf{P}(X > k+1)) = \mathbf{P}(X > k+1 \mid X > k)\mathbf{P}(X > k).$$

(21) Sachant que $X > k$, on a $X > k+1$ si et seulement si la $(k+1)$-ième boule tirée est distincte des k premières boules tirées. On a donc

$$\mathbf{P}(X > k+1 \mid X > k) = \frac{n-k}{n}.$$

De là

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X > k) &= \frac{n-k+1}{n}\mathbf{P}(X > k-1) = \frac{n-k+1}{n}\frac{n-k+2}{n}\mathbf{P}(X > k-2) \\
&= \cdots \\
&= \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-k+k)}{n^k}P(X > 0) \\
&= \frac{n!}{(n-k)!n^k}.
\end{aligned}$$

On peut remplacer les $\cdots$ par une récurrence immédiate.

(22) C'est du cours :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n+1} k\mathbf{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k\left(\mathbf{P}(X > k-1) - \mathbf{P}(X > k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(k+1)\mathbf{P}(X > k) - \sum_{k=1}^{n+1} k\mathbf{P}(X > k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(X > k) + \mathbf{P}(X > 0) - (n+1)\mathbf{P}(X > n+1) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(X > k)
\end{aligned}$$

car $\mathbf{P}(X > n+1) = 0$.

(23) On a donc

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!n^k} \underset{j=n-k}{=} \sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!n^{n-j}} = \frac{n!}{n^n}\sum_{j=0}^{n}\frac{n^j}{j!} = \frac{n!}{n^n}T_n(1).$$

A l'aide de (17) et de Stirling, on en déduit que

$$\mathbf{E}(X) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2n\pi}\,\frac{e^n}{2} = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}.$$