Devoir surveillé 3

Correction

Exercice 1.

$\boxed{I_4}$ L'intégrale est impropre en 0 et en 1. De plus :

$$\begin{cases} \dfrac{t\ln(t)}{t-1} & \underset{0}{\sim} & -t\ln(t) & \underset{t\to 0}{\overset{\text{CC}}{\longrightarrow}} & 0 \\ \dfrac{t\ln(t)}{t-1} & \underset{1}{\sim} & \dfrac{t(t-1)}{t-1} & \underset{t\to 1}{\longrightarrow} & 1 \end{cases}$$

L'intégrale I_4 est donc faussement impropre en 0 et en 1. Elle est donc convergente.

$\boxed{I_5}$ L'intégrale est impropre en $+\infty$. Par croissance comparées, on a :

$$t^2.(t^2e^{-t}) \underset{t\to 0}{\overset{\text{CC}}{\longrightarrow}} 0$$

Ainsi :

$$\begin{cases} t^2e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \\ \text{Les fonctions sont positives} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt \text{ est convergente} \end{cases}$$

Par théorème de comparaison, l'intégrale I_5 est convergente.

$\boxed{I_6}$ L'intégrale est impropre en $+\infty$.

$$\sqrt{1+x^2} - x = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) \underset{0}{\sim} x\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x}$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x}dx$ est divergente et que les fonctions sont positives, on conclue à l'aide du théorème de comparaison que :

$$\int_0^{+\infty} (\sqrt{1+x^2} - x)dx$$

est divergente et donc I_6 également.

Exercice 2.

$\boxed{\text{Q1}}$ Par récurrence sur n dans $\mathbb{N}$, montrons que les intégrales I_n sont convergentes. Pour $n = 0$ on on obtient $I_0 = \int_0^1 dx = 1$. Supposons que l'intégrale I_n est convergente pour n fixé dans $\mathbb{N}$, et montrons que I_{n+1} est convergente. Dans I_{n+1} effectuons une intégration par partie généralisée :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \ln^{n+1}(x) \\ v'(x) & = & 1 \end{array}\right. \qquad \text{donc} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & (n+1)\frac{\ln^n(x)}{x} \\ v(x) & = & x \end{array}\right.$$

Les fonctions sont C^1 et le crochet :

$$\left[x\ln^{n+1}(x)\right]_0^1 = 0$$

est convergent et vaut 0 par croissance comparée. Les hypothèses du théorème sont donc vérifiées et I_{n+1} est de même nature que $(n+1)I_n$. Or cette intégrale est convergente par hypothèse de récurrence. On a donc la relation :

$$I_{n+1} = -(n+1)I_n$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Par récurrence immédiate, on a : $I_n = (-1)^n n!$

Exercice 3.

$\boxed{\text{Q1}}$ Puisque :

$$\left\{\begin{array}{l} \left|\dfrac{\cos(\beta x)}{x^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{x^\alpha} \\ \text{Les fonctions sont positives} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx \text{ est convergente car } \alpha > 1 \end{array}\right.$$

on peut appliquer le théorème de comparaison. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\beta x)}{x^\alpha}dx$ est absolument convergente, donc convergente.

$\boxed{\text{Q2}}$ Effectuons une intégration par partie généralisée en posant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u(x) & = & \dfrac{1}{x^\alpha} \\ v'(x) & = & \cos(\beta x) \end{array}\right. \qquad \text{donc} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} u'(x) & = & -\alpha\dfrac{1}{x^{\alpha+1}} \\ v(x) & = & \frac{1}{\beta}\sin(\beta x) \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v sont C^1 et le crochet converge car :

$$\left[\frac{\sin(\beta x)}{\beta x^\alpha}\right]_1^{+\infty} = -\frac{\sin(\beta)}{\beta}$$

En effet, on a la limite d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0. Les hypothèses de l'intégration par partie généralisée sont vérifiées, les intégrales suivantes sont donc de même nature :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\beta x)}{x^\alpha}dx \qquad\qquad \frac{\alpha}{\beta}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\beta x)}{x^{\alpha+1}}dx$$

Or, d'après la question 1, la deuxième intégrale est convergente puis que $\alpha + 1 > 1$. Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\beta x)}{x^\alpha}dx$ est convergente.

$\boxed{\text{Q3}}$ Comme $|cos(x)| \leq 1$, en multipliant par $|\cos(x)|$, on obtient :

$$|cos(x)| \geq |cos(x)|^2 = cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Q4 Tout d'abord :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+\cos(2\beta x)}{2x^\alpha}dx = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\beta x)}{x^\alpha}dx$$

La première intégrale est une intégrale de Riemann divergente et la seconde est une intégrale convergente d'après la question précédente. Ainsi :

$$\begin{cases} \dfrac{1+\cos(2\beta x)}{2} \leq \dfrac{|\cos(\beta x)|}{x^\alpha} \\ \text{Les fonction sont positives} \\ \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+\cos(2\beta x)}{2x^\alpha}dx \text{ est divergente} \end{cases}$$

D'après le théorème de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(\beta x)}{x^\alpha}dx$ n'est pas absolument convergente, mais convergente d'après la question Q2. L'intégrale est donc semi-convergente.

Q5 Puisque $\alpha > 0$:

$$0 \leq k\pi \leq x \leq (k+1)\pi \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{(k\pi)^\alpha} \geq \frac{1}{x^\alpha} \geq \frac{1}{((k+1)\pi)^\alpha}$$

Ainsi :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos(x)|}{x^\alpha}dx \geq \int_{k\pi}^{(k+1)} \frac{|\cos(x)|}{\pi^\alpha(k+1)^\alpha}dx = \frac{1}{\pi^\alpha(k+1)^\alpha}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos(x)|dx$$

Effectuons ensuite le changement de variables $X = x - k\pi$:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos(x)|}{x^\alpha}dx \geq \frac{1}{\pi^\alpha(k+1)^\alpha}\int_0^\pi |(-1)^n\cos(x)|dx = \frac{1}{\pi^\alpha(k+1)^\alpha}\int_0^\pi |\cos(x)|dx$$

Q6 En posant $K = \dfrac{1}{\pi^\alpha}\displaystyle\int_0^\pi |\cos(x)|dx$ et en sommant l'inéquation trouvée dans la question précédente entre $k=1$ et $k=n$, on obtient :

$$\int_\pi^{n\pi} \frac{|\cos(\beta x)|}{x^\alpha}dx = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos(\beta x)|}{x^\alpha}dx \geq K\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^\alpha}$$

On reconnait à droite de l'inégalité, une série de Riemann qui diverge puisque $\alpha < 1$, ainsi d'après le théorème d'encadrement, l'intégrale

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{|\cos(x)|}{x^\alpha}dx$$

est divergente.

Pour le cas général, on effectue le changement de variables $X = \beta x$ qui est C^1 et strictement monotone . On obtient que les deux intégrales suivantes sont de même nature :

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(\beta x)|}{x^\alpha}dx \qquad\qquad \beta^{\alpha-1}\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(X)|}{X^\alpha}dX$$

On reconnait cette fois l'intégrale correspondant au cas où $\beta = 1$ qui est divergente. On a donc montré le cas général.

Q7 Effectuons le changement de variable : $X = \beta x - k\pi + \frac{\pi}{2}$. C'est un bien un changement de variable C^1 et strictement monotone puisque $\beta \neq 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{\frac{(2k-1)\pi}{2\beta}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2\beta}} \frac{\cos(\beta x)}{x^\alpha}dx \\ &= \beta^{-1}\int_0^\pi \frac{\cos(X + k\pi - \frac{\pi}{2})}{\beta^{-\alpha}(X + k\pi - \frac{\pi}{2})^\alpha}dX \\ &= (-1)^k\beta^{\alpha-1}\int_0^\pi \frac{\cos(X - \frac{\pi}{2})}{(X + k\pi - \frac{\pi}{2})^\alpha}dX \\ &= (-1)^k\beta^{\alpha-1}\int_0^\pi \frac{\sin(X)}{(X + k\pi - \frac{\pi}{2})^\alpha}dX \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q8}}$ Comme sin est positif sur $[0,\pi]$ et α est négatif, on a :

$$|a_k| \;=\; \beta^{\alpha-1}\int_0^\pi \sin(x)\left(x+k\pi-\frac{\pi}{2}\right)^{-\alpha}dx \;\underset{k\geq 1}{\geq}\; \beta^{\alpha-1}\int_0^\pi \sin(x)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\alpha}dx \;=\; 2\beta^{\alpha-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\alpha}$$

Ainsi, la suite $(|a_k|)$ est minorée par un réel strictement positif. Elle ne converge donc pas vers 0.

$\boxed{\text{Q9}}$ Comme la suite (a_k) ne tend pas vers 0, la série $\sum a_k$ est divergente. Or, en utilisant la relation de Chasles, on obtient pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \;=\; \int_{\frac{\pi}{2\beta}}^{\frac{(2n+1)\pi}{2\beta}} \frac{\cos(\beta x)}{x^\alpha}dx$$

L'intégrale C est donc également divergente.

Exercice 4.

$\boxed{1}$ Les fonctions f et $t\mapsto\cos(nt)$ sont C^1 sur $[a,b]$, on peut effectuer une intégration par partie :

$$\begin{aligned}
|I_n| &= \left|\int_a^b f(t)\cos(nt)dt\right| \\
&= \left|\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)dt\right| \\
&\underset{\text{IT}}{\leq} \frac{|f(a)\sin(na)|}{n} + \frac{|f(b)\sin(nb)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)\sin(nt)|dt
\end{aligned}$$

La fonction f' est continue sur le segment $[a,b]$, elle est donc bornée par un certain réel M. On obtient :

$$|I_n| \;\leq\; \frac{|f(a)|}{n} + \frac{|f(b)|}{n} + \frac{M}{n}(b-a)$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

$\boxed{2}$ Soit $(x_0,\ldots,x_p)$ une subdivision adaptée à la fonction en escaliers f c'est-à-dire que $a=x_0$, $b=x_p$ et que les points de discontinuité de f sont dans l'ensemble $\{x_0,\ldots,x_p\}$. De plus notons λ_i la valeur de f sur l'intervalle $]x_i;x_{i+1}[$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\cos(nt)dt\right| &= \left|\sum_{i=0}^{p-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\cos(nt)dt\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i\int_{x_i}^{x_{i+1}} \cos(nt)dt\right| \\
&\underset{\text{IT}}{\leq} \sum_{i=0}^{p-1}|\lambda_i|\left|\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{x_i}^{x_{i+1}}\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{p-1}\frac{2|\lambda_i|}{n}
\end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\boxed{3}$ Soit $(x_0,\ldots,x_p)$ une subdivision adaptée à la fonction continue par morceaux f. Sur chaque $]x_i;x_{i+1}[$, la fonction f est prolongeable par continuité sur $[x_i;x_{i+1}]$ puisque les limites de f aux bornes existent. Cette fonction est alors continue sur un segment, elle est donc bornée par un certain M_i. On a donc :

$$\forall i\in\{0,\ldots,n-1\},\ \forall t\in]x_i;x_{i+1}[,\ |f(t)|\leq M_i$$

Le réel :

$$M = Max\{M_0,M_1,\ldots,M_{n-1},|f(x_0)|,|f(x_0)|,\ldots,|f(x_n)|\}$$

est alors un majorant de $|f|$, et f est bornée.

$\boxed{4}$ Soit $\varepsilon' > 0$. Comme f est continue par morceaux, il existe une suite (g_n) de fonctions en escaliers convergeant uniformément vers f. Ainsi il existe N dans $\mathbb{N}$, tel que :

$$\|f - g_N\|_\infty \leq \varepsilon'$$

Il suffit de prendre $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ et $g = g_N$.

$\boxed{5}$

$$\begin{aligned}
|I_n| &= \left|\int_a^b f(t)\cos(nt)dt\right| \\
&= \left|\int_a^b (f(t)-g(t))\cos(nt)dt + \int_a^b g(t)\cos(nt)dt\right| \\
&\underset{\text{IT}}{\leq} \int_a^b |f(t)-g(t)||\cos(nt)|dt + \left|\int_a^b g(t)\cos(nt)dt\right| \\
&\leq \|f-g\|_\infty \int_a^b 1dt + \left|\int_a^b g(t)\cos(nt)dt\right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b g(t)\cos(nt)dt\right|
\end{aligned}$$

Enfin dans la question 2, on a vu que le lemme de Lebesgues est vrai pour les fonctions en escaliers, donc pour la fonction g. Le second terme tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il est donc inférieur à $\frac{\epsilon}{2}$ à partir d'un certain rang. On obtient la définition de la limite nulle de I_n en $+\infty$.