2020-2021 | **Devoir surveillé 2** | PSI

Correction

" Prédire, c'est très difficile, surtout s'il s'agit de l'avenir"

Adrien et Teddy

Exercice 1.

Cf. exercices de références.

Exercice 2.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient M_1, M_2 dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$:

$$\phi(\lambda.M_1+\mu.M_2) = (\lambda.M_1+\mu.M_2)-2\,{}^t(\lambda.M_1+\mu.M_2) = (\lambda.M_1-2\lambda^tM_1)+(\mu.M_2-2\mu\,{}^tM_2) = \lambda.\phi(M_1)+\mu.\phi(M_2)$$

Ainsi ϕ est une application linéaire dont les espaces de départ et d'arrivée sont identiques. C'est donc un endomorphisme.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit A dans $\text{Ker}(\phi)$. Ainsi $\phi(A) = A - 2^tA = 0$. On a alors :

$$A = 2^tA = 2^t(2^tA) = 4A$$

Ainsi $A = 0$ et le noyau de ϕ est réduit à $\{0\}$, l'application ϕ est donc injective. De plus ϕ étant un endomorphisme injectif de dimension finie, ϕ est automatiquement surjectif.

$\boxed{\text{Q3}}$ Déterminons les images des matrices élémentaires par ϕ :

$$\begin{cases} \phi(E_{11}) = E_{11}-2\,{}^tE_{11} = E_{11}-2E_{11} = -E_{11} \\ \phi(E_{12}) = E_{12}-2\,{}^tE_{12} = E_{12}-2E_{21} \\ \phi(E_{21}) = E_{21}-2\,{}^tE_{21} = E_{21}-2E_{12} \\ \phi(E_{22}) = E_{22}-2\,{}^tE_{22} = E_{22}-2E_{22} = -E_{22} \end{cases}$$

Ainsi la matrice de ϕ dans la base β est :

$$[\phi]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Q4}}$ Calculons le polynôme caractéristique :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X-1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & X-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X+1)^2\left((X-1)^2-4\right) = (X+1)^3(X-3)$$

Comme la multiplicité de la vp 3 est 1, on a automatiquement $\text{Mult}(3) = \dim(E_3) = 1$. Déterminons la dimension de E_{-1} :

$$E_{-1} = \text{Ker}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

On a bien $\text{Mult}(-1) = \dim(E_{-1}) = 3$. De plus le polynôme caractéristique est scindé. D'après la première condition de diagonalisation, l'endomorphisme ϕ est diagonalisable.

$\boxed{\text{Q5}}$ L'endomorphisme étant diagonalisable, d'après la 2ème CNS de diagonalisation, le polynôme spectral :

$$P = (X+1)(X-3)$$

est un polynôme annulateur.

$\boxed{\text{Q6}}$ On a :

$$F = \text{Ker}(\phi^2 - Id)$$

Donc F est bien un sev de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q7}}$

$$\begin{array}{rcl} A \in F & \Longleftrightarrow & \phi\, o\, \phi(M) = M \\ & \Longleftrightarrow & (M - 2^tM) - 2^t(M - 2^tM) = M \\ & \Longleftrightarrow & M - 2^tM - 2^tM + 4M = M \\ & \Longleftrightarrow & -4^tM + 4M = 0 \\ & \Longleftrightarrow & {}^tM = M \\ & \Longleftrightarrow & M \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \end{array}$$

De plus comme $\dim(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$, alors :

$$\dim(F) = \dim(\mathcal{S}(\mathbb{R})) = 3$$

Exercice 3.

$\boxed{\text{Q1}}$ Déterminons le déterminant de la matrice associée à cette famille de vecteurs dans la base canonique :

$$\det\left([x_1, x_2, x_3, x_4]_c\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La dernière équation a été obtenue grâce aux opérations $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 + C_2$. En développant suivant les deux dernières colonnes, on obtient alors :

$$\det\left([x_1, x_2, x_3, x_4]_c\right) = 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Le déterminant étant non nul, la famille β est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Déterminons les images des vecteurs $x_1, \ldots, x_4$:

$$\begin{cases} f_A(x_1) = x_1 \\ f_A(x_2) = x_2 \\ f_A(x_3) = -x_3 \\ f_A(x_4) = -x_4 \end{cases}$$

La famille β est donc une base de vecteurs propres pour f_A. L'endomorphisme f_A est donc diagonalisable, puisque sa matrice dans la base β est diagonale.

$\boxed{\text{Q3}}$ Déterminons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 & -1 \\ -1 & 0 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & -1 & 0 \\ 0 & X & 0 & -1 \\ X^2-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X^2-1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

avec les opérations élémentaires $L_3 \leftarrow L_3 + X.L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + XL_2$. En développant suivant les deux dernières lignes, on obtient :

$$\chi_A = (x^2-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1)^2$$

$\boxed{\text{Q4}}$ Déterminons les sous-espaces propres :

$$E_1 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_{-1} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

La multiplicité des 2 valeurs propres coïncident avec la dimension des espaces propres et le polynôme caractéristique est scindé. D'après la 1ère CNS de diagonalisation, la matrice est diagonalisable.

$\boxed{\text{Q5}}$ On a $A^2 = I$. Ainsi le polynôme $(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples. D'après la 2ème CNS de diagonalisation, la matrice A est diagonalisable.

$\boxed{\text{Q6}}$ Si A n'a qu'une valeur propre, comme A est diagonalisable alors A est une homothétie, ce qui n'est pas le cas. Ainsi A a au moins deux valeurs propres.

$\boxed{\text{Q7}}$ Comme $P = (X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de A, on a :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Rac}(P) = \{-1, 1\}$$

Comme A a au moins deux valeurs propres d'après la question précédente, on a égalité et les valeurs propres de A sont 1 et -1.

Exercice 4.

1. 2. Pour calculer le spectre de A nous calculons son polynôme caractéristique $P_A(X) = \det(XI_3 - A)$

$$\det\left(\begin{bmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{bmatrix}\right) \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \det\left(\begin{bmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ X+1 & X-1 & 1 \\ X+1 & 1 & X-1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \det\left(\begin{bmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ 0 & X-2 & 1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{bmatrix}\right) = (X+1)(X-2)^2$$

Nous en déduisons que le spectre de A est $\{-1, 2\}$ dont les multiplicités respectives sont $m_1 = 1$ et $m_{-2} = 2$.

Le calcul des sous-espaces propres de A donne d'une part $E_{-1}(A) = Vect\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ et $E_2(A) = Vect\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$. Nous concluons que $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

3. Si on note

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Comme

$$D^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D + I_3$$

Nous déduisons que l'on a $\boxed{A^2 = A + 2I_3}$ vu que A est semblable à D.

Pour tout entier $n \geq 2$ si nous multiplions l'identité $A^2 = A + 2I_3$ par A^{n-1} à gauche nous obtenons la relation $\boxed{A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1}}$. Le cas $n = 1$ découle directement de la question précédente.

4. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\mathcal{P}_n = \{ \ (0 \leq k \leq n) \Rightarrow \left(\exists (u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } A^k = \begin{bmatrix} u_k & v_k & v_k \\ v_k & u_k & v_k \\ v_k & v_k & u_k \end{bmatrix} \right) \}$$

Nous établissons dans un premier temps cette formule par récurrence.

- La relation $\mathcal{P}_1$ est vraie en prenant $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$ puis $u_1 = 1$, $v_1 = -1$.
- Si on suppose que l'on a un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. En effet, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n+1$, on a :
  — Si $k \leq n$, cela decoule du fait que $\mathcal{P}_n$ est vrai.
  — Si $k = n+1$, cela découle du fait que l'on a $A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1}$ car il vient que

$$\begin{bmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} u_{n-1} & v_{n-1} & v_{n-1} \\ v_{n-1} & u_{n-1} & v_{n-1} \\ v_{n-1} & v_{n-1} & u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n + 2u_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} \\ v_n + 2v_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} \\ v_n + 2v_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} \end{bmatrix}$$

  est de la forme voulue en posant $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$ et $v_{n+1} = v_n + 2v_{n-1}$.

En utilisant la question précédente et la propriété que $\mathcal{P}_n$, nous déduisons grâce à la question 4

$$A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1}, \ \forall n \in \mathbb{N}^\star$$

que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\boxed{\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \\ v_{n+1} = v_n + 2v_{n-1} \end{cases}}$$

5. Nous savons que les suites récurrentes linéaires à deux pas $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ solutions de

$$X_{n+2} = X_{n+1} + 2X_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension deux dont une base est donnée par les suites $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$: nous pouvons donc en déduire qu'il existe quatre réels $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n \text{ et } v_n = \gamma 2^n + \delta(-1)^n$$

La prise en compte des conditions initiales $u_0 = u_1 = 1$ permet de conclure que

$$\boxed{\mathrm{u}_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right)}$$

alors que la contrainte $v_0 = 0, \ v_1 = -1$ permet d'avoir :

$$\boxed{\mathrm{v}_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n - 2^n\right)}$$

Partie II

1. Si nous considérons la matrice $M = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda^2 & \mu^2 \end{bmatrix}$ sous nos hypothèses, nous observons que M est inversible et que $M^{-1} = \dfrac{1}{\lambda\mu(\mu-\lambda)} \begin{bmatrix} \mu^2 & -\mu \\ -\lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}$. Il s'ensuit que l'on a :

$$\boxed{\begin{aligned} U &= \frac{1}{\lambda\,(\mu-\lambda)}\left(\mu A - A^2\right) \\ V &= \frac{1}{\mu\,(\mu-\lambda)}\left(-\lambda A + A^2\right) \end{aligned}}$$

Comme enfin $A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V$, on a

$$\boxed{\mathrm{A}^3 = \frac{\lambda^2}{\mu-\lambda}\left(\mu A - A^2\right) + \frac{\mu^2}{\mu-\lambda}\left(-\lambda A + A^2\right) = (\lambda+\mu)\,A^2 + (-\lambda\mu)\,A}$$

2. Nous venons de voir que nous avons la relation $A\,(A - \lambda I_n)\,(A - \mu I_n) = 0_n$. Cependant le reste R_p de la division euclidienne de X^p par $X(X-\lambda)(X-\mu)$ est de la forme

$$R_p = aX^2 + bX + c$$

avec les conditions

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \mu^2 & \mu & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^p \\ \mu^p \end{bmatrix}$$

qui s'obtiennent en prenat comme valeurs respectives pour X : 0, λ et μ toutes différentes.
On trouve $c = 0$ et, sous nos hypothèses de travail,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda^{p-1} - \mu^{p-1}}{\lambda - \mu} \\ \dfrac{\lambda\mu^{p-1} - \lambda^{p-1}\mu}{\lambda - \mu} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui nous permet d'avoir pour tout $p \geq 1$:

$$A^p = \frac{\lambda^{p-1} - \mu^{p-1}}{\lambda - \mu} \times A^2 + \frac{\lambda\mu^{p-1} - \lambda^{p-1}\mu}{\lambda - \mu} \times A$$

Et si nous substituons A^2 par $\lambda^2 U + \mu^2 V$ et A par $\lambda U + \mu V$ nous trouvons le résultat voulu comme le montre un calcul direct.

3. a. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\vec{x}) = \vec{0}$, en prenant la convention standard $f^0 = Id_{\mathbb{R}^n}$, on a $f^p(\vec{x}) = f^{p-1}(f(\vec{x})) = f^{p-1}(\vec{0}) = \vec{0}$. Nous en concluons que

$$\boxed{\ker f \subset \ker f^p,\ \forall p \in \mathbb{N}^\star}$$

b. C'est une conséquence de la question 2 et de l'isomorphisme d'espace vectoriels vu en première année

$$\Psi_{\varepsilon_0^n} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

qui a un endomorphisme associe sa matrice dans la base canonique ε_0^n de $\mathbb{R}^n$ et du fait que ce dernier soit aussi un morphisme d'algèbre. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$:

$$\boxed{\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda\mu f^{p-1}(\vec{x}) = (\lambda+\mu)\, f^p(\vec{x}) - f^{p+1}(\vec{x})}$$

c. Si $\vec{x} \in \ker f^p$, on a deux cas de figures :
— Si $p = 1$, le résultat désiré est immédiat.
— Si $p \geq 2$, notons $p_0 \geq 1$ le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $f^p(\vec{x}) = \vec{0}$: si on avait $p_0 > 1$, du fait que l'on ait simultanément $f^{p_0}(\vec{x}) = f^{p_0+1}(\vec{x}) = \vec{0}$ d'après la question 3.a, nous aurions une contradiction car la question précédente permet de dire que $\lambda\mu f^{p_0-1}(\vec{x}) = \vec{0}$ avec $\lambda\mu \neq 0$. L'absurde vient d'avoir supposé que $p_0 > 1$.

Dans tous les cas, $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Nous en déduisons que

$$\boxed{\ker f^p \subset \ker f}$$

d. Si on utilise les questions 3.a et 3.c, nous pouvons déduire que $\ker f = \ker f^p$ pour tout entier $p \geq 1$; nous pouvons donc dire que $\dim \ker f = \dim \ker f^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$ puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie.
La formule du rang, donnant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $rg(A^k) = \dim Im(f^k) = n - \dim \ker f^k$, l'égalité que nous venons d'établir permet de conclure que $rg(A)^k = rg(A)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ ce qui est le résultat désiré.

Partie III

1. En toute rigueur, le produit ${}^tV.U$ est un élément de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ qui peut être canoniquement identifié à $\mathbb{R}$. Dans le chapitre concernant les espaces euclidiens, nous avons vu que

$$\boxed{{}^tV.U = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k}$$

2. Il suffit d'effectuer le calcul matriciel en mettant en oeuvre l'associativité des opérations de multiplication en jeu. On a $U.{}^tV \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$\boxed{\left(U.{}^tV\right)^2 = (U.{}^tV)(U.{}^tV) = U.({}^tV.U).{}^tV = \underbrace{({}^tV.U)}_{k\in\mathbb{R}} \times U.{}^tV}$$

Et comme $A = aI_n + U.{}^tV$, on a

$$A^2 \underbrace{=}_{U.{}^tV \times I_n = I_n \times U.{}^tV} \left(a^2 I_n + 2aU.{}^tV + k \times U.{}^tV\right) = a^2 I_n + (2a+k)\, U.{}^tV = a^2 I_n + (2a+k)\,(A - aI_n)$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{A}^2 = \underbrace{2a+k}_{\alpha} A + \underbrace{(-a^2 - ka)}_{\beta} I_n}$$

3. On part du fait que $U.{}^tV = (u_i \times v_j)_{1 \le i,j \le n}$ pour en déduire que :
   - Si $1 \le i \le n$, $a_{i,i} = a + u_i v_i$
   - Si $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le n$ avec $i \neq j$, , $a_{i,j} = u_i v_i$

   Comme $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = n \times a + \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$, on obtient

$$\boxed{\text{tr A = na + } {}^tV.U = na + k}$$

4. On a vu que $\alpha = 2a + k$ on trouve $\boxed{\alpha = trA - (n-2)a}$ et $\beta = -a^2 - ka$ donne $\boxed{\beta = -a^2 - a(trA - na) = -a\,(trA - (n-1)a)}$.
5. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, nous savons qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $A.X = \lambda X$. On a donc

$$A^2.X = A.A.X = A.\lambda X = \lambda A.X = \lambda^2 X$$

   donc $\boxed{\text{si } \lambda \in \mathbb{C} \text{ est une valeur propre de } A \text{ alors } \lambda^2 \text{ est une valeur propre de } A^2}$.
   Si désormais $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, on a vu qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul tel que $A.X = \lambda X$. On a donc $A^2.X = A.A.X = A.\lambda X = \lambda A.X = \lambda^2 X$ et finalement

$$\lambda^2 X = (\alpha\lambda + \beta)\, X$$

   puisque X est un vecteur non nul, les valeurs propres complexes λ de A vérifient

$$\boxed{\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0}$$

6 Si on considère l'équation $X^2 - \alpha X - \beta = 0$, nous savons qu'elle est égal à

$$X^2 - (trA - (n-2)a)X + a(trA - (n-1)a) = 0$$

ce qui donne

$$(X - a) \times (X - trA + (n-1)a) = 0$$

c'est-à-dire que $\boxed{\text{les deux valeurs propres possibles de } A \text{ sont } a \text{ et } trA - (n-1)a.}$

7. a. La condition $trU^tV \neq 0$ permet de dire que $trA \neq tr\,(aI_n)$ ou encore $trA \neq na$. Sous cette hypothèse, nous considérons deux cas possibles :
   - Si l'une ou l'autre des deux valeurs candidates à être dans le spectre de A ne s'y trouve pas, il s'ensuit que l'espace E_i associé est réduit à $\{0_{n,1}\}$ donc le résultat est trivialement vrai.

- Si au contraire, les deux valeurs propres de A sont exactement les deux racines précédemment trouvées, nous avons deux sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes - car $trA \neq na$ - d'après le cours, ces sous-espaces sont en somme directe et leur intersection se réduit au sous-espace nul.

7.b **Analyse :** si on avait une telle décomposition $X = X_1 + X_2$, nous aurions

$$A.X = aX_1 + (trA - (n-1)a)X_2$$

il en découlerait que $A.X - aX = (trA - na)\,X_2$ et comme $trA \neq na$, nous aurions

$$X_2 = \frac{1}{trA - na}(A.X - aX) \text{ et } X_1 = \frac{1}{trA - na}((trA - (n-1)a)X - A.X)$$

Synthèse : si nous prenons les deux valeurs définies ci-dessus

$$X_2 = \frac{1}{trA - na}(A.X - aX) \text{ et } X_1 = \frac{1}{trA - na}((trA - (n-1)a)X - A.X)$$

On vérifie que l'on a :

- $X = X_1 + X_2$
- $AX_2 = \frac{1}{trA - na}\left(A^2.X - aA.X\right) = \frac{1}{trA - na}(\alpha A.X + \beta X - aA.X) =$
$\frac{1}{trA - na}((trA - (n-2)a)A.X + (-a(trA - (n-1)a)X - aA.X) =$
$\frac{1}{trA - na}((trA - (n-1)a)A.X + (-a(trA - (n-1)a)X) = \frac{(trA - (n-1)a)}{trA - na}(AX - aX)$
$= (trA - (n-1)a)X_2$
- Calcul très similaire pour valider que $AX_1 = aX_1$.

Sous l'hypothèse $tr(U^tV) \neq 0$, on a $\boxed{\text{E1 + E}_2 = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

7.c A la question 7.a, nous avons établit que $E_1 \cap E_2$ est l'espace nul : nous pouvons donc en déduire que

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = E_1 \oplus E_2$$

Pour en déduire que A est diagonalisable, nous prenons une base ε_1 de E_1 et une base ε_2 de E_2. La famille $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car ces espaces sont supplémentaires. Si P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de cette famille, nous aurons $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ et $A.P = P.D$ où D est une matrice diagonale. Nous en déduisons que $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.

8. Pour le voir prendre

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, a = 2$$