2020-2021 **Devoir surveillé 1** PSI

Devoir surveillé 1

Correction

Exercice 1-2.

Cf. cours.

Exercice 3.

$\boxed{\text{Q1}}$ Pour λ, μ dans $\mathbb{R}$ et P, Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\phi(\lambda P + \mu Q) \quad = \quad (\lambda P + \mu Q)' + m(\lambda P + \mu Q) \quad = \quad \lambda(P' + mP) + \mu(Q' + mQ) \quad = \quad \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$$

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit P dans $Ker(\phi)$, on a donc :

$$P \in \text{Ker}(\phi) \quad \Longrightarrow \quad P' + mP = 0 \quad \Longrightarrow \quad P' = -mP \quad \Longrightarrow \quad \deg(P') = \deg(P)$$

ce qui n'est réalisé que si P est nul. Le noyau de ϕ est donc réduit à $\{0\}$, l'application ϕ est donc injective. De plus les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension finie, l'application devient automatiquement bijective.

$\boxed{\text{Q3}}$ D'après la question précédente P a un antécédent par ϕ de même degré ; notons-le par Q. On a donc :

$$P(x)e^{mx} \quad = \quad \phi(Q)(x)e^{mx} \quad = \quad (Q'(x) + mQ(x))e^{mx} = (Q(x)e^{mx})'$$

$\boxed{\text{Q4}}$ On cherche une primitive de $f(x) = x^5e^x$ de la forme $g(x) = (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f)e^x$. L'équation $g' = f$ devient donc :

$$ax^5 + (b + 5a)x^4 + (c + 4b)x^3 + (d + 3c)x^2 + (e + 2d)x + (f + e))e^x = x^5e^x$$

En simplifiant par e^x et en identifiant on trouve ; $g(x) = x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120$. Ainsi :

$$\int_0^1 f(x)dx \quad = \quad [g(x)]_0^1 \quad = \quad 1 - 5 + 20 - 60 + 120 \quad = \quad 76$$

Exercice 4.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soient λ et μ dans $\mathbb{R}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$:

$$f\left(\lambda.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mu.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) \quad = \quad f\begin{pmatrix} \lambda.x + \mu x' \\ \lambda.y + \mu y' \\ \lambda.z + \mu z' \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2(\lambda.x + \mu x') - (\lambda.y + \mu y') \\ (\lambda.y + \mu y') + 2(\lambda.z + \mu z') \\ (\lambda.x + \mu x') + (\lambda.z + \mu z') \end{pmatrix} \quad = \quad \lambda.\begin{pmatrix} 2x - y \\ y + 2z \\ x + z \end{pmatrix} + \mu.\begin{pmatrix} 2x' - y' \\ y' + 2z' \\ x' + z' \end{pmatrix}$$

Ainsi f est bien une application linéaire. De plus, les espaces de départ et d'arrivée sont identiques. L'application f est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q2 Déterminons le noyau de ϕ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\phi) \iff \begin{pmatrix} 2x-y \\ y+2z \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x = y = -2z \\ y = -2z \\ x = -z \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Q3 Comme l'image d'une base de $\mathbb{R}^3$ engendre $Im(f)$, on a :

$$Im(f) = \mathrm{Vect}\left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

La dernière égalité est obtenue en remarquant que le 3ème vecteur est égal à la somme du premier et de 2 fois le second. De plus, les deux vecteurs restant sont libres car ce sont deux vecteurs non colinéaires. Ainsi une base de $\mathrm{Im}(f)$ est :

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Q4 Montrons tout d'abord que $H \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H \cap \mathrm{Ker}(f) \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} -y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$$

De plus, comme $\dim(H) = 2$, on a :

$$\dim(H \oplus \mathrm{Ker}(f)) = \dim(H) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2 + 1 = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$$

De plus, comme $H \oplus \mathrm{Ker}(f) \subset dim(\mathbb{R}^3)$, on a donc égalité. Les sev H et $Ker(f)$ sont alors supplémentaires.

Problème.

Q1 Soient P, Q dans $\mathbb{R}[X]$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$.

$$\phi(\lambda P + \mu Q) = \frac{1}{2}\big[(\lambda P + \mu Q)(X+1) + (\lambda P + \mu Q)(X)\big] = \frac{\lambda}{2}\big[P(X+1) + P(X)\big] + \frac{\mu}{2}\big[Q(X+1) + Q(X)\big] = \lambda\phi(P) + \mu\phi(Q)$$

Ainsi ϕ est une application linéaire. Les espaces de départ et d'arrivée étant identiques, c'est un endomorphisme.

Q2 En développant à l'aide du binôme de Newton, on trouve :

$$\phi(X^k) = \frac{1}{2}\big[(X+1)^k + X^k\big] = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{k} \binom{i}{k} X^i + X^k\right] = X^k + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} \binom{i}{k} X^i$$

Ainsi le terme dominant de $\phi(X^k)$ est X^k.

Q3 D'après la question Q2, le degré de Q_k est k. Ainsi, la famille $(Q_0, \ldots, Q_n)$ est une famille de vecteurs non nuls, échelonnée en degré, elle est donc libre. De plus, elle présente $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs, c'est donc automatiquement une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4 Tout d'abord, l'application ϕ_n est bien linéaire puisqu'il s'agit de la restriction de l'application linéaire ϕ. De plus, l'application ϕ_n transforme la base canonique en une base : la base $(Q_0, \ldots, Q_n)$ (cf Q3). Elle est donc bijective.

$\boxed{\text{Q5}}$ Comme ϕ est un endomorphisme d'après la question 1, il suffit de montrer que ϕ est bijective.

Injectivité : soit P dans $\mathrm{Ker}(\phi)$, on a alors $\phi(P) = 0$. Supposons P non nul et notons $n = deg(P)$. On a alors $\phi_n(P) = 0$ et comme ϕ_n est injective, on a encore $P = 0$. Absurde. Ainsi ϕ est injective.

Surjectivité : considérons Q dans $\mathbb{R}[X]$. Choisissons n dans $\mathbb{N}$ tel que $n \geq \deg(P)$. Comme ϕ_n est surjective, il existe P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $\phi_n(P) = Q$. Enfin comme $\phi_n(P) = \phi(P)$, le polynôme Q a un antécédent et l'application ϕ est surjective.

$\boxed{\text{Q6}}$ Tout d'abord :

$$\begin{cases} \phi(1) & = & \frac{1}{2}(1+1) & = & 1 \\ \phi(X) & = & \frac{1}{2}((X+1)+X) & = & X + \frac{1}{2} \\ \phi(X^2) & = & \frac{1}{2}\left((X+1)^2 + X^2\right) & = & X^2 + X + \frac{1}{2} \\ \phi(X^3) & = & \frac{1}{2}\left((X+1)^3 + X^3\right) & = & X^3 + \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi la matrice de ϕ_3 dans la base canonique est :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Q7}}$ L'application ϕ étant bijective, il existe un unique antécédent du polynôme $\dfrac{X^n}{n!}$. On note ce polynôme E_n.

$\boxed{\text{Q8}}$ • Comme $\phi(1) = \phi(E_0) = 1$, et que ϕ est injective, on a $E_0 = 1$.

• En substituant 0 à X dans $E_n(X+1) + E_n(X) = \frac{2X^n}{n!}$, on trouve $E_n(1) + E_n(0) = 0$.

• En dérivant la même expression, on trouve :

$$E_n'(X+1) + E_n'(X) = \frac{2X^{n-1}}{(n-1)!}$$

Ainsi, on a : $\phi(E_n') = \phi(E_{n-1}) = \frac{2X^{n-1}}{(n-1)!}$. Par injectivité de ϕ, on trouve $E_n' = E_{n-1}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ *Existence :* vérifions que

$$P(X) = \int_0^X Q(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 Q(t)\,dt$$

est solution du système. Comme P est continue, on peut utiliser le théorème fondamental de l'analyse. On obtient $P' = Q$. De plus :

$$P(0) + P(1) \;=\; \int_0^0 Q(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 Q(t)\,dt + \int_0^1 Q(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 Q(t)\,dt \;=\; 0$$

Unicité : Soient P_1 et P_2 des solutions du système. Notons $P = P_1 - P_2$. Tout d'abord $P' = P_1' - P_2' = Q - Q = 0$, donc il existe une constante c tel que $P = c$. Enfin :

$$2c \;=\; P(0) + P(1) \;=\; (P_1(0) + P_1(1)) - (P_2(0) + P_2(1)) \;=\; 0$$

On a donc bien $P = 0$ et $P_1 = P_2$.

$\boxed{\text{Q10}}$ D'après Q8, on a pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} E_n' = E_{n-1} \\ E_n(0) + E_n(1) = 0 \end{cases}$$

Ainsi d'après Q9, on a :

$$E_n(X) = \int_0^X E_{n-1}(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 E_{n-1}(t)\,dt$$

Ainsi :

$$\begin{cases} E_0 &= 1 \\ E_1 &= \int_0^X 1(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 1\,dt &= X - \frac{1}{2} \\ E_2 &= \int_0^X \left(t - \frac{1}{2}\right)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(t-\frac{1}{2}\right)dt &= \left(\frac{X^2}{2} - \frac{X}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) &= \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} \\ E_3 &= \int_0^X \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right)dt - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right)dt &= \left(\frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) &= \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{1}{24} \end{cases}$$

Q11 Calculons $\phi(F_n)$:

$$\begin{aligned} \phi(F_n) &= \frac{1}{2}\left(F_n(X+1) + F_n(X)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big((-1)^n E_n(1-(X+1)) + (-1)^n E_n(1-X)\big) \\ &= \frac{(-1)^n}{2}\big(E_n(-X) + E_n(1-X)\big) \\ &= (-1)^n \phi(E_n)(-X) \\ &= (-1)^n \frac{(-X)^n}{n!} \\ &= \frac{X^n}{n!} \end{aligned}$$

On a donc $\phi(F_n) = \phi(E_n)$. Par injectivité de ϕ, on obtient $F_n = E_n$, c'est-à-dire :

$$E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X)$$

Q12 • En prenant $n = 2p$ et en substituant 0 à X dans l'équation trouvée de la question Q11, on obtient :

$$E_{2p}(1) = E_{2p}(0)$$

De plus, d'après la question Q8, on a : $E_{2p}(1) + E_{2p}(0) = 0$. Ainsi $E_{2p}(1) = E_{2p}(0) = 0$

• En prenant $n = 2p-1$ et en substituant cette fois $\frac{1}{2}$ à X dans l'équation trouvée de la question Q11, on a :

$$E_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right) = -E_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

On a donc bien $E_{2p-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

Q13 En utilisant que $E'_n = E_{n-1}$ et la question $Q12$, on montre facilement par récurrence sur n que les tableaux de variations de E_n sont de la forme suivante :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
E'_n		$+$		$-$	
E_n	0	↗		↘	0

k=0

x	0		$\frac{1}{2}$		1
E'_n		$+$		$-$	
E_n	0	↘		↗	0

k=2

x	0		$\frac{1}{2}$		1
E'_n		$+$		$-$	
E_n		↗	0	↗	

k=1

x	0		$\frac{1}{2}$		1
E'_n		$+$		$-$	
E_n		↘	0	↘	

k=3