Espaces préhilbertiens réels.

PSI

Chapitre 7

I. Produit scalaire

I.1. Espace préhilbertien-réel

Définition.

1. On appelle produit scalaire euclidien sur un espace $\mathbb{R}$-espace vectoriel, toute application ϕ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
   1) ϕ est bilinéaire.
   2) ϕ est symétrique : $\forall x, y \in E,\ \phi(x,y) = \phi(y,x)$.
   3) ϕ est positive : $\forall x \in E,\ \phi(x,x) \geq 0$.
   4) ϕ est définie positive : $\forall x \in E,\ \phi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.
2. On appelle espace préhilbertien réel, tout couple $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\langle\ ,\ \rangle$ un pse sur E
3. On appelle espace vectoriel euclidien (eve), un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Remarques.

1) ϕ positive ne signifie pas $\forall x, y \in E,\ \phi(x,y) \geq 0$.
2) Un semi-produit scalaire est un produit scalaire à qui il manque le caractère définie. C'est donc uniquement une forme bilinéaire symétrique positive.
3) On note souvent les pse : $\langle x, y\rangle$, (x/y) ou $x.y$.
4) Un produit scalaire est bilinéaire, mais pas linéaire puisque pour tout λ de $\mathbb{R}$ et x, y dans E :

$$\phi(\lambda.(x,y)) = \langle \lambda.x, \lambda.y\rangle = \lambda^2.\langle x, y\rangle$$

5) Le pse se comporte comme un produit, il faut donc savoir développer une somme. Par exemple :

$$\langle a+b\ ,\ c+d\rangle = \langle a\ ,\ c\rangle + \langle a\ ,\ d\rangle + \langle b\ ,\ c\rangle + \langle b\ ,\ d\rangle$$

I.2. Exemples de références

Exemple. [1] $\mathbb{R}^n$ muni du pse :

$$\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + \ldots + x_n.y_n$$

avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $x = (y_1, \ldots, y_n)$, est un eve. Si on assimile les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes à n lignes, le produit scalaire peut s'écrire :

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}),\quad \langle X, Y\rangle = X^T Y$$

Exemple.[2] $M_{pq}(\mathbb{R})$ muni du pse :

$$\langle A,B\rangle = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}b_{ij} = tr\left(A^T B\right)$$

est un eve.

Exemple.[3] $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni du pse :

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

est un préhilbertien réel.

Exemple.[4] $\mathbb{R}|X]$ muni d'un pse du type :

$$\langle P,Q\rangle = \int_a^b P(x)Q(x)dx$$

avec a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$, est un préhilbertien réel.

I.3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème.[5] Soit $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel, alors pour tous x et y dans E :

1. $|\langle x,y\rangle| \le \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}$,
2. Il y a égalité ssi x et y sont liés.

Remarques.

1. L'inégalité de CS, sans le cas d'égalité, reste valable si $\langle,\rangle$ est seulement un semi-produit scalaire.
2. Par contre, le cas d'égalité nécessite le caractère défini.

Exemples. Voici la traduction du théorème de Cauchy-Schwarz dans les préhilbertiens réels classiques :

1	Dans $\mathbb{R}^n$,	$\left\vert\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i\right\vert \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$
2	Dans $M_n(\mathbb{R})$,	$\left\vert tr\left(A^T B\right)\right\vert \le \sqrt{tr\left(A^T A\right)}\sqrt{tr\left(B^T B\right)}$
3	Dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$,	$\left\vert\int_a^b f(x)g(x)dx\right\vert \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$

I.4. Norme euclidienne

Définition. Une norme sur un $\mathbb{R}$-ev est une application N de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant pour tous x et y de E, et tout λ de $\mathbb{R}$:

1) $N(x) = 0 \iff x = 0$,
2) $N(\lambda.x) \;=\; |\lambda|.N(x)$,
3) $N(x+y) \;\leq\; N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire).

Théorème - Définition.[6] Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un préhilbertien réel.

1. On peut associer à ce produit scalaire une norme $\|\ \|$ par :
$$\forall x \in E,\;\; \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$
C'est la norme euclidienne.
2. De plus on contrôle le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire :
$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \quad \iff \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\; y = \lambda x \;\text{ ou }\; x = \lambda y$$

Remarques.

1. Avec les notations de la norme euclidienne, l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient :
$$\forall x, y \in E, \quad \left|\langle x, y\rangle\right| \;\leq\; \|x\|.\|y\|$$
2. Il existe des normes non euclidiennes, c'est-à-dire des normes qui ne proviennent pas d'un produit scalaire. Il y a un exemple après l'inégalité du parallélogramme.

I.5. Distance euclidienne

Définition. Une distance sur un ensemble E est une application d de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant pour tous x, y et z de E :

1) $d(x,x) = 0 \iff x = 0$,
2) $d(x,y) \;=\; d(y,x)$,
3) $d(x,z) \;\leq\; d(x,z) + d(z,y)$ (Inégalité triangulaire).

Théorème - Définition.[7] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un préhilbertien réel et $\|..\|$ sa norme euclidienne alors l'application d définie par :
$$\forall x, y \in E,\;\; d(x,y) \;=\; \|x - y\|$$
est une distance. C'est la distance euclidienne.

Remarque. Il existe des distances non euclidiennes, même des distances qui ne proviennent d'aucune norme. Par exemple sur $\mathbb{R}$, l'application d définie par :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\; d(x,y) \;=\; \arctan(|x-y|)$$
est une distance qui ne provient d'aucune norme.

I.6. Identités de polarisation

Propriétés. [8] Il existe certaines relations entre le produit scalaire et la norme euclidienne. Pour tous x et y de E, on a :

$$\begin{array}{llll} 1 & \|x+y\|^2 & = & \|y\|^2 + \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle \\ 2 & \langle x, y\rangle & = & \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|y\|^2 - \|x\|^2\right) \\ 3 & \langle x, y\rangle & = & \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) \end{array}$$

Intérêt. Les identités 2 et 3 permettent, à partir de la norme euclidienne de retrouver le produit scalaire.

Exercice. [9]

1. Montrer que la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ est une norme euclidienne. Déterminer le produit scalaire associé.
2. Montrer que le module sur le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$ est une norme euclidienne. Déterminer le produit scalaire associé.

I.7. Identité du parallélogramme.

Théorème. [10] Si $\| \ \|$ est une norme euclidienne alors :

$$\forall x, y \in E, \ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \ = \ 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Remarque. On utilise souvent la contraposée de l'inégalité du parallélogramme pour montrer qu'une norme n'est pas euclidienne. Un exemple dans l'exercice suivant.

Exercice. [11] Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Notons pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et tout p de $[1; +\infty[$. :

$$\|x\|_p \ = \ \sqrt[p]{|x_1|^p + \ldots |x_n|^p} \qquad\qquad \|x\|_\infty \ = \ \underset{i \in [[1,n]]}{\text{Max}} |x_i|$$

On admet que ce sont des normes.

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a :
$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p \ = \ \|x\|_\infty$$
2. Montrer que la norme $\| \ \|_p$ avec p dans $[1; +\infty]$ est euclidienne si et seulement si $p = 2$.

II. Orthogonalité

II.1. Définitions

Définitions. Soit $(E, <,>)$ un préhilbertien. Soient x, y dans E et A, B des sous ensembles de E.

1. x et y sont othogonaux, on note $x \perp y$, si et seulement si : $\langle x, y\rangle = 0$
2. x et A sont othogonaux, on note $x \perp A$ ou $A \perp x$, si et seulement si : $\forall a \in A,\ \langle x, a\rangle = 0$
3. A et B sont othogonaux, on note $A \perp B$ si et seulement si : $\forall\ a \in A,\ b \in B,\ \langle a, b\rangle = 0$
4. Soit A une partie de E, on appelle orthogonale de A, on note $A^\perp$, l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A :
$$A^\perp = \left\{\ x \in E\ /\ \forall a \in A,\ \langle a, x\rangle = 0\ \right\}$$
Ainsi on a a l'équivalence : $x \in A^\perp \iff x \perp A$.

Propriétes.[12] Soit A et B des parties quelconques de E

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $A \perp A^\perp$ et donc $A \subset (A^\perp)^\perp$.
3. $A \subset B \Longrightarrow B^\perp \subset A^\perp$.
4. $A^\perp = (Vect(A))^\perp$
5. $\varnothing^\perp = \{0\}^\perp = E$, $E^\perp = \{0\}$

II.2. Familles orthogonales, familles orthonormales

Définition. Soit $I = \mathbb{N}$ ou $I = \{1, \ldots, n\}$ avec n dans $\mathbb{N}^*$.

1. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite orthogonale si et seulement si $x_i \perp x_j$ pour tous i et j différents dans I. On note $x_1 \perp x_2 \perp \ldots$.
2. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite orthonormale si et seulement si la famille est orthogonale et si tous les vecteurs ont une norme de 1. En d'autres termes, pour tous i et j de I :

$$\langle x_i, x_j\rangle \ = \ \delta_{ij} \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Propriétés.[13]

1. Toute famille orthonormale est libre.
2. Toute famille orthogonale ne présentant pas le vecteur nul, est libre.

Exercice.[14]

1. Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée.
2. Montrer que la base des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{ij}$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$.

Exercice. [15] Notons $E = C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues 2π périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Posons

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

1. Montrer que $<,>$ est un pse sur E.
2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, notons c_n et s_n les applications définies par $c_n(x) = \cos(nx)$ et $s_n(x) = \sin(nx)$. Montrer pour tout n de $\mathbb{N}$ que la famille suivante est orthogonale :

$$(c_0, c_1, \ldots, c_n, s_0, s_1, \ldots, s_n)$$

3. Expliquer pourquoi cette famille n'est pas libre. Quelle sous famille faut-il prendre pour qu'elle soit libre ?

Exercice. [16] Pour des polynômes P et Q à coefficients dans $\mathbb{R}$, on note :

$$\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

1. Montrer que l'intégrale précédente converge pour tous polynômes P et Q.
2. Montrer que $\langle,\rangle$ est un pse sur $\mathbb{R}[X]$
3. Pour tout n de $\mathbb{N}$, notons T_n le n^{e}polynôme de Tchebitchev, c'est-à-dire l'unique polynôme vérifiant $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

II.3. Le théorème de Pythagore

Théorème - Pythagore. [17] Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un préhilbertien réel.

1. $x_1 \perp x_2$ si et seulement si $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$.
2. Si $x_1 \perp x_2 \perp \ldots \perp x_n$ alors $\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2$.

Remarque. La réciproque du point 2 est fausse pour $n \geq 3$. On peut le vérifier en prenant par exemple les vecteurs $(1,1)$, $(0,-1)$ et $(1,0)$.

II.4. Somme directe orthogonale.

Propriétés. [18] Soient F et G des sev de E, alors :

$$F \perp G \implies F \oplus G$$

Définition. Lorsque deux sev F et G sont orthogonaux, on note $F \overset{\perp}{\oplus} G$ pour penser que cela signifie $F \perp G$ mais aussi $F \oplus G$.

Méthode - Comment montrer que $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$?

1. On montre que $F \perp G$
2. Connait-on les dimensions de E, F et G ?
   - Si oui, on vérifie que $dim(F \oplus G) = dim(E)$ et on conclut,
   - Si non, on montre que $E = F + G$

Exercice - Sommes directes classiques.[19]

1. Montrer que :
$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;=\; S_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} A_n(\mathbb{R})$$
2. Soit a dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que :
$$C^0([-a,a],\mathbb{R}) \;=\; \mathcal{P}([-a;a],\mathbb{R}) \;\overset{\perp}{\oplus}\; \mathcal{I}([-a;a],\mathbb{R})$$
avec $\mathcal{P}([-a;a],\mathbb{R})$ et $\mathcal{I}([-a;a],\mathbb{R})$ les $\mathbb{R}$-ev des fonctions continues paires et impaires de $[-a;a]$ dans $\mathbb{R}$.

II.5. Représentation des formes linéaires à l'aide du produit scalaire.

Théorème de représentation de Reisz.[20] Soit E un eve (donc de DF). Pour toute FL ϕ sur E, il existe a dans E tel que :
$$\forall x \in E,\; \phi(x) \;=\; \langle a, x\rangle$$
Ainsi les FL sont exactement les applications $x \mapsto \langle a, x\rangle$ pour a dans E.

Conséquences.[21] Soit E un eve.

1. Pour tout hyperplan H de E, il existe a dans E tel que :
$$x \in H \iff \langle x, a\rangle = 0$$
En particulier, a est un vecteur normal de H.
2. Dans une BON, l'équation d'un hyperplan est de la forme :
$$a_1 x_1 \;+\; \dots \;+\; a_n x_n = 0$$
avec $(a_1, \dots, a_n)$ un vecteur normal de H.

Exemple. Les formes linéaires sur $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ sont exactement les $M \mapsto Tr(AM)$ avec $A \in M_{qp}(\mathbb{R})$.

Méthode.[22] Techniques pour obtenir une équation ou un vecteur normal d'un hyperplan en dimension finie.

1. H est un hyperplan, c'est donc le noyau d'une forme linéaire l.
2. D'après Reisz, cette forme linéaire peut s'écrire sous la forme $\langle a, .\rangle$.
3. Le vecteur a est un vecteur normal à H, car $\forall y \in H$, $y \in Ker(l)$ et donc $\langle a, y\rangle = 0$.

Exercice.[23] Montrer que :
$$H = \left\{ M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij} = 0 \right\}$$
est un hyperplan. Déterminer un vecteur normal.

III. Utilisation et fabrication de familles orthogonales.

III.1. Composantes d'un vecteur dans une BON

Théorème.[24] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un eve et $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Les coordonnées d'un vecteur x de E peuvent être exprimées à l'aide du pse :

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \qquad\qquad x \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \langle x, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

III.2. Expression du produit scalaire scalaire dans une BON

Théorème.[25] Soient E un eve et $\beta = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. De plus notons $[x]_\beta = (x_1, \ldots, x_n)$ et $[y]_\beta = (y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de x et y dans β, alors :

$$\langle x, y \rangle = \left\langle [x]_\beta, [y]_\beta \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \|[x]_\beta\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Dans la deuxième égalité, $\langle ., . \rangle$ et $\|.\|$ représente le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne associée.

Remarques.

1. Ainsi dans une BON, le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit scalaire de leurs coordonnées.
2. Si la base n'est pas orthonormale, l'expression du produit scalaire peut être beaucoup plus lourde.

III.3. Expression du projeté orthonormal dans une BON

Définition. Soit F un sev d'un $\mathbb{R}$-ev tel que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$. La projection orthogonale sur F est la projection sur F de direction $F^\perp$.

Théorème.[26] Soient E un pré-hilbertien réel, F un sev de E de dimension finie et $(e_1, \ldots e_n)$ une BON de F. Alors la projection orthogonale sur F existe et :

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

Remarque.

1. Ainsi pour que la projection orthogonale sur F existe, il faut et il suffit que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.
2. Si on considère Id_E comme une projection orthogonale sur E, on retrouve à l'aide de ce théorème l'expression des coordonnées d'un vecteur dans une BON.

Exercice - Bessel.[27] Soient $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale d'un espace pré-hilbertien réel.

1. Notons p_n la projection orthogonale sur $F_n = \text{vect}(e_1, \dots, e_n)$. Exprimer $\|p_n(x)\|^2$ à l'aide de x, des e_i et du produit scalaire.
2. En déduire que la série $\sum \langle x, e_n \rangle^2$ est convergente pour tout x de E et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \;\leq\; \|x\|^2$$

C'est l'inégalité de Bessel.

III.4. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

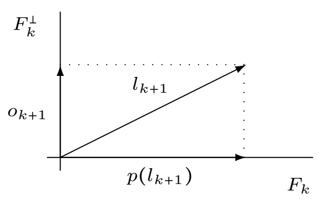
Théorème.[28] Soit E un préhilbertien réel. On va décrire un procédé qui permet de construire une famille orthogonale $(o_1, o_2, \dots, o_n)$ à partir d'une famille libre $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ de E. Construisons le vecteur o_k par récurrence forte :

1. Si $k = 1$ on pose $o_1 = l_1$
2. Supposons que $o_1, \dots, o_k$ construits, construisons o_{k+1}.

$$o_{k+1} \;=\; l_{k+1} - p(l_{k+1}) \;=\; l_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \left\langle l_{k+1}, \frac{o_i}{\|o_i\|} \right\rangle \frac{o_i}{\|o_i\|}$$

avec p la projection orthogonale de E sur $F_k = Vect(o_1, \dots, o_k)$.

Vision géométrique de ce qu'on fait.



Remarques.

1. La famille $\beta = \left(\frac{o_1}{\|o_1\|}, \dots, \frac{o_k}{\|o_k\|} \right)$ est une BON de F_k et l'expression $\sum_{i=1}^{k} \left\langle l_{k+1}, \frac{o_i}{\|o_i\|} \right\rangle \frac{o_i}{\|o_i\|}$ est l'expression du projeté orthogonale de l_{k+1} dans la BON β.
2. Si les premiers vecteurs de la famille sont déjà orthogonaux, l'algorithme ne modifie pas ces vecteurs puisque dans l'expression de o_{k+1} les produits scalaires sont nuls.
3. Une fois l'algorithme effectué, on peut très bien rendre la famille $(o_1, \dots, o_n)$ orthonormale en divisant chaque vecteur par sa norme. On peut aussi donner une autre condition de normalisation. Par exemple s'il s'agit de polynômes, on peut préférer avoir des polynômes unitaires (coefficient dominant valant 1) plutôt que normés.

Propriétés. Soit $(o_1, \ldots, o_n)$ la famille orthogonale construite à partir de $(l_1, \ldots, l_n)$ à l'aide du procédé de Gram-Scmidt.

1) $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{Vect}(o_1, \ldots, o_k) = \mathrm{Vect}(l_1, \ldots, l_k)$
2) $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\langle o_k, l_k \rangle > 0$

Exercice.[29] Soit

$$\begin{cases} u_1 = (1,1,1) \\ u_2 = (1,0,1) \\ u_3 = (1,1,0) \end{cases}$$

Effectuer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Scmidt, afin de transformer cette famille libre en base orthonormale.

Exercice.[30] On munit $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P/Q) \; = \; \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$

Utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une base othogonale de polynômes unitaires à partir de la famille $\left(1, X, X^2\right)$.

III.5. Conséquences

Théorème.[31] Soit E un espace vectoriel euclidien (donc de dimension finie) et F un sous-espace vectoriel de E.

1. E admet au moins une BON.
2. Toute famille orthonormale peut être complétée en une BON (Théorème de la base orthonormale incomplète).
3. $E \; = \; F \oplus F^{\perp}$
4. $dim F^{\perp} = dim E - dim F$.
5. $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$

IV. Projections et symétries orthonormales.

IV.1. Unicité du supplémentaire orthogonale, à défaut de l'existence.

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel E. Un supplémentaire orthogonal de F dans E est un sous-espace vectoriel G vérifiant :

$$E \; = \; F \overset{\perp}{\oplus} G$$

Théorème - Unicité et condition d'existence. [32] Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel pré-hilbertien réel, et F un sev de E.

1. $F^{\perp}$ est le seul supplémentaire orthogonal possible de F dans E. En d'autres termes, s'il existe G vérifiant $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$ alors $G = F^{\perp}$.
2. $F^{\perp}$ n'est pas toujours un supplémentaire orthogonal de F c'est-à-dire que $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ n'est pas toujours égal à E.
3. Si F est de dimension finie alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$

Le point 1 montre que le supplémentaire orthogonal d'un sev s'il existe est unique. Mais le point 2 montre qu'il n'existe pas toujours. On pourra voir un contre-exemple à la fin du paragraphe.

Exemples.

1. On a : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\perp} = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})^{\perp} = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On a : $\mathcal{P}([-a,a],\mathbb{R})^{\perp} = \mathcal{I}([-a,a],\mathbb{R})$ et $\mathcal{I}([-a,a],\mathbb{R})^{\perp} = \mathcal{P}([-a,a],\mathbb{R})$ dans $C^0([-a,a],\mathbb{R})$.

Remarques.

1. Comme le montre les exemples précédentes, il n'y a pas de réciproque au point 3 du théorème.
2. Dans une espace de Hilbert, on peut montrer que si F est fermé alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ ce qui généralise le point 3 du théorème.

Exercice - Un cas où le supplémentaire orthogonal n'existe pas. [33] On identifie polynôme et fonction polynôme, on peut donc supposer $\mathbb{R}[X]$ sev de $C^0([a,b],\mathbb{R})$.

1. En utilisant que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de polynômes, montrer que
$$\mathbb{R}[X]^{\perp} = \{0\}$$
2. En déduire que l'on peut trouver F sev d'un $\mathbb{R}$-ev E tels que $E \neq F \oplus F^{\perp}$.
3. En déduire que l'on peut trouver F sev d'un $\mathbb{R}$-ev E tels que $(F^{\perp})^{\perp} \neq F$.

IV.2. Définitions

Définition. Soit F un sev d'un $\mathbb{R}$-ev tel que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ (un sous espace vectoriel F de dimension finie par exemple).

1. La projection orthogonale sur F est la projection sur F de direction $F^{\perp}$.
2. La symétrie orthogonale sur F est la symétrie par rapport à F de direction $F^{\perp}$.

Remarques.

1. Si p est la projection orthogonale sur F alors $Id - p$ est la projection orthogonale sur $F^{\perp}$. La projection $Id - p$ est la projection orthogonale associée à p.
2. La projection orthogonale sur F et la symétrie orthogonale par rapport à F existent si et seulement si $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$. On sait déjà que c'est le cas par exemple si F est de DF, mais pas uniquement.

Exercice.[34] Soit V un vecteur non nul de $\mathcal{M}_{n1}$. Montrer que l'endomorphisme de matrice :
$$P = \frac{VV^T}{\|V\|^2}$$
est la projection orthogonale sur Vect(V).

Exercice. [35] Soit p une projection d'un espace pré-hilbertien réel. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si :

$$\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$$

Pour la réciproque, on pourra raisonner par contraposée. Pour une projection sur F de direction G, on pourra prendre λ dans $\mathbb{R}$ et (x,y) dans $F \times G$ non orthogonaux et développer l'expression : $\|\lambda x + y\|^2 - \|p(\lambda x + y)\|^2$

IV.3. Comment trouver l'image par une projection ou symétrie ?

Méthodes - Comment trouver $p(x)$? [36]

Soit p la projection orthogonale de E sur F et x un vecteur de E. Comment peut-on trouver $p(x)$?

- Idée 1. On peut facilement décomposer x en $x = x_1 + x_2$ avec x_1 dans F et x_2 dans $F^\perp$. Dans ce cas $p(x) = x_1$
- Idée 2. Il existe une BON $(e_1, \ldots, e_n)$ sur F. Dans ce cas :

$$p(x) = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2 + \ldots + \langle x, e_n\rangle e_n$$

- Idée 3. Sinon $p(x)$ est la seule solution du système :

$$\begin{cases} p(x) \in F \\ x - p(x) \perp F \end{cases}$$

Méthode - Comment trouver $s(x)$? [37]

Soient s la symétrie orthogonale de E par rapport à F, p la projection orthogonale de E sur F et x un vecteur de E. Comment peut-on trouver $s(x)$?

1. On cherche $p(x)$.
2. On utilise la relation $2p = s + id$

Exercice. [38] Soient $E = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ et p la projection orthogonale sur F le sev des fonctions paires de E.

1. Justifier l'existence de p.
2. Déterminer l'image par p de la fonction exponentielle.

Exercice. [39] Notons

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sev $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 2.
2. Déterminer une base orthonormale de $\mathcal{A}$
3. En déduire la matrice de la projection orthogonale sur A dans $\beta = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

Exercice. [40] Soit $F : x + 2y + z = 0$ un plan de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'image de (x,y,z) par p la projection orthogonale sur F
2. En déduire la matrice de p dans la base canonique.

IV.4. Théorème de projection.

Définition. Soit E un préhilbertien réel, F un sev de E et x un vecteur de E, alors la distance de x à F est obtenu par :

$$d(x,F) \quad = \quad \inf\left\{ d(x,y)\,/\, y\in F \right\} \quad = \quad \inf\left\{ \|x-y\|\,/\,y\in F\right\}$$

Théorème.[41] Soit E un préhilbertien réel, F un sev de E et x un vecteur de E. On suppose de plus que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$ pour avoir l'existence de p la projection orthogonale sur F, alors :

$$d(x,F) \quad = \quad d(x,p(x)) \quad = \quad \|x-p(x)\|$$

Remarques.

1. L'inf de la définition de $d(x,F)$ est en fait un min puisqu'elle est atteinte pour $p(x)$.
2. La meilleure approximation de x par un élément de F est $p(x)$.

Conséquences.[42] Soient E un eve, β une BON de E et y, a des vecteurs de coordonnées $(y_1,\dots,y_n)$ et $(a_1,\dots,a_n)$ dans β.

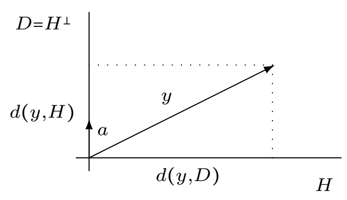
1. Notons H un hyperplan d'équation $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$ dans β, alors :

$$d(y,H) \quad = \quad \frac{|\,a_1y_1+\dots+a_ny_n\,|}{\|a\|}$$

2. Notons $D = Vect(a)$ alors :

$$d(y,D) \quad = \quad \frac{\sqrt{\|y\|^2\|a\|^2-\langle a,y\rangle^2}}{\|a\|}$$

Remarque. Il ne faut pas apprendre les formules mais savoir les retrouver. Tout se voit sur le dessin suivant :



Exercice.[43] Déterminer la distance entre un vecteur $\vec{u}(3,4,5)$ de $\mathbb{R}^3$ et le plan $F : x+2y+z=0$.

Exercice.[44] Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la meilleure approximation (pour la norme usuelle) de A par une matrice symétrique.

Exercice.[45] Déterminer : $\displaystyle \operatorname*{Inf}_{a,b\in\mathbb{R}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x)-ax-b)^2dx$

V. Limite et continuité.

V.1. Limite d'une suite

Définition. Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel et $\|\_\|$ la norme euclidienne associée. La suite (u_n) tend vers un vecteur l de E, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ \|u_n - l\| \leq \varepsilon$$

C'est la définition de la limite d'une suite réelle en remplaçant la valeur absolue par la norme euclidienne.

Caractérisation.[46] On peut toujours se ramener à la convergence d'une suite réelle puisque :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\ \|} l \quad \Longleftrightarrow \quad \|u_n - l\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Théorème.[47]

1. Une suite (M_n) de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ tend vers M si et seulement si les coefficients de (M_n) tendent vers les coefficients de M.
2. Une suite (x_n) de $\mathbb{R}^n$ tend vers x si et seulement si les coordonnées de x_n tendent vers les coordonnées de x.
3. Soient (M_n) et (N_n) des suites respectives de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{qr}(\mathbb{R})$, alors :

$$\left\{\begin{array}{l} M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M \\ N_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} N \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad M_nN_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} MN$$

Exemples.

$$n\begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{1}{n}\right) \\ \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \frac{1}{n}\begin{pmatrix} (-1)^n & n+1 \\ n^2\sin\left(\frac{1}{n}\right) & 1 \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice.[48]

1. Soit $\|.\|_2$ la norme euclidienne de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ \|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$$

2. Notons (a_{ii}^k) les coefficients de la matrice A^k. Montrer que :

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, p\}, \forall k \in \mathbb{N},\ |a_{ij}^k[\leq \|A\|_2^k$$

3. On définit l'exponentielle complexe par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

   Montrer que cette série converge.

4. Comment calculer l'exponentielle d'une matrice diagonalisable A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

V.2. Quand une notion vous manque... Suites de Cauchy (HP).

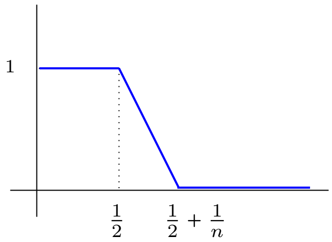
Définition. Soit $(E, \|\_\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Une suite (x_n) est une suite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N,\ \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$$

   Ainsi, une suite de Cauchy est une suite qui ne "bouge" plus beaucoup à partir d'un certain rang.
2. On remarquera que les suites convergentes sont des suites de Cauchy. Si la réciproque est vraie, c'est-à-dire que toutes les suites de Cauchy de E convergent alors E est dit complet.
3. Un espace de Hilbert réel est un préhilbertien réel complet.

Exercice - une suite de Cauchy non convergente.[49] Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel. Considérons pour tout n de $\mathbb{N}^*$ l'application f_n de E définie par :



1. Montrer que pour tous p et q dans $\mathbb{N}$ avec $p > q$, on a : $\|f_p - f_q\| \leq \frac{1}{q}$.
2. En déduire que (f_n) est une suite de Cauchy.
3. Montrer que si (f_n) converge vers f alors f vaut 1 sur $[0; \frac{1}{2}]$ et f vaut 0 sur tout intervalle de la forme $[a, 1]$ avec $a > \frac{1}{2}$
4. En déduire que (f_n) ne converge pas dans E.

V.3. Ouverts/Fermés.

Définition temporaire. Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Un sous ensemble F de E est fermé si et seulement si toute suite convergente de F converge dans F c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall l \in E,\quad \forall (u_n) \in F^{\mathbb{N}},\quad u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \quad \Longrightarrow \quad l \in F$$

2. Un sous ensemble O de E est ouvert si et seulement si son complémentaire est un fermé.

Exemples.[50] Soient a, b, c et d dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c < d$.

1. $]a, b[$, $]a, +\infty[$ et $]-\infty, b[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
2. $[a, b]$, $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
3. $[a, b] \times [c, d]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$
4. $[a, b]^n$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exercice. [51] Notons

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ / \ a,b,c,d \in [0,1] \right\} \qquad B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ / \ a,b,c,d \in \mathbb{R}^* \right\}$$

Montrer que A est un fermé et B est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

V.4. Limite et continuité d'une application

Définition. Soient E et F des espaces préhilbertiens réels et $\|\ldots\|_E$, $\|\ldots\|_F$ les normes euclidiennes associées. Notons f une application d'un sous-ensemble D de E dans F.

1. Soit x_0 dans E. L'application f admet une limite l en x_0, et on note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, si et seulement si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in D_f, \ \|x - x_0\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\|_F \leq \varepsilon$$

2. Soit x_0 dans D. L'application f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. L'ensemble des applications de D dans F continue est noté $\mathcal{C}(D, F)$.

Remarques.

1. La définition de la limite n'est rien d'autre que la définition de la limite d'une fonction réelle en remplaçant les valeurs absolues par des normes.
2. Si on arrive à montrer que pour tout x de E, on a :

$$\|f(x) - l\|_F \ \leq \ \alpha \|x - x_0\|_E^\beta$$

avec α et β réels positifs, l'application f admet l pour limite en x_0 (on prend $\eta = \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}$). En pratique, comme par exemple dans l'exercice suivant, on essaie de retrouver cette inégalité.

Exercice. [52] Montrer que l'application f de $(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\ldots|)$ suivante admet une limite en 0 :

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$