Suites et séries de fonctions.

PSI

Chapitre 6

Contexte. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et (f_n) est une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$.

I. Modes de convergence.

I.1. A propos de la norme infinie.

Définition. Soit f dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et $A \subset I$. On note :

$$\|f\|_\infty^A = \underset{x\in A}{\text{Sup}}\,|f(x)|$$

Comme le sup n'est pas toujours fini, $\|f\|_\infty^A$ peut éventuellement valoir $+\infty$. C'est donc un élément de $\overline{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur A, on notera simplement $\|f\|_\infty$.

Remarques. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On rappelle que :

1. $\|\_\|_\infty^{[a,b]}$ est une norme sur $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$.
2. $\|\_\|_\infty^I$ est une norme sur $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$.
3. $\|\_\|_\infty^I$ n'est pas une norme sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ ou sur $\mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{R})$ car les fonctions ne sont pas forcément bornées et la norme infinie peut valoir $+\infty$.

Propriétés.[1] Les propriétés ressemblent à celle d'une norme :

1. $\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ pour toutes fonctions f et g.
2. $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|.\|f\|_\infty$ pour toute fonction f et tout réel λ non nul.
3. Si $\|f\|_\infty = 0$ alors $f = 0$ sur A.

La grosse différence avec une norme est que ces égalités/inégalité sont à prendre dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition. Soit (f_n) une suite de fonctions et l dans $\mathbb{R}$, alors $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ signifie que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Big|\|f_n\|_\infty - l\Big| \le \varepsilon$$

C'est la même definition que les suites dans $\mathbb{R}$. En d'autres termes $\|f_n\|_\infty$ est finie à partir d'un certain rang et que la suite de réels $\|f_n\|_\infty$ à partir de ce rang tend vers 0.

I.2. Convergence simple, convergence uniforme.

Définitions. Soient f_n et f dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. La suite (f_n) converge simplement vers f (on note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$) ssi :
$$\forall x \in I,\ f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$$
2. La suite (f_n) converge uniformément vers f (on note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$) ssi :
$$\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
3. La suite (f_n) converge uniformément sur tout segment vers f (on note $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CUS}} f$) ssi (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment $[a,b]$ de I

Remarques.

1. Coin de culture : la convergence simple ne provient d'aucune norme (ni d'une distance), c'est-à-dire qu'il n'existe pas de norme N telle que :
$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{N} f$$
2. La notion de CUS n'a pas d'intérêt si I est un segment puisque dans ces cas là, elle est équivalente à la notion de CU. De plus, la notation CUS n'est pas standard. Il faut rappeler sa signification dans les copies.
3. Il y a bien sûr d'autres types de convergence. La convergence avec la norme $\|\_\|_1$ ou avec la nome $\|\_\|_2$ par exemple. Nous n'en parlerons pas ici.

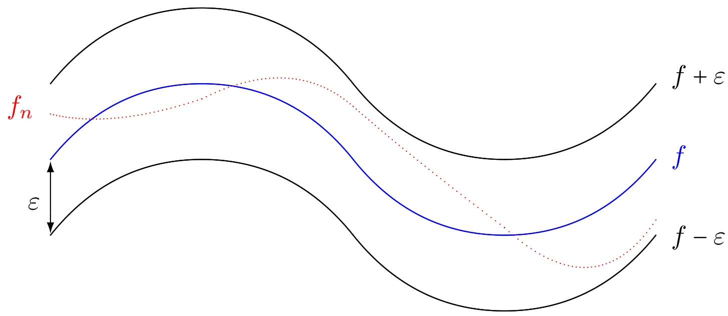
Propriétés - traduction epsilonnesque.[2]

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underline{\forall x \in I,}\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \underline{\forall x \in I,}\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, dans la cas de la convergence uniforme, le N choisi doit convenir à tous les x de I. Dans la convergence simple, on choisit un N pour chaque x.

Vision géométrique de la convergence uniforme.



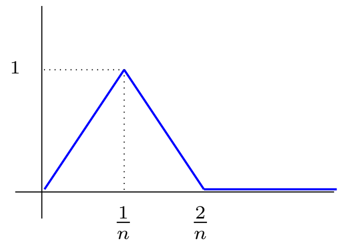
La suite (f_n) converge uniformément vers f, si et seulement si, pour tout ε strictement positif, les graphes des fonctions f_n sont entre les 2 courbes noires APCR.

I.3. Relations entre les types de convergence.

Théorème. [3]

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CUS}} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$$

Contre-exemple 1. Il peut y avoir convergence simple et pas convergence uniforme (ni uniformément sur tout segment) comme le montre l'exemple suivant. Considérons la suite de fonction (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par :



La suite (f_n) convergence simplement vers la fonction nulle mais ne converge pas ni uniformément ni uniformément sur tout segment.

Contre-exemple 2. Il peut y avoir convergence uniforme sur tout segment et pas convergence uniforme. Par exemple si les fonctions du contre exemple précédent sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$, on a convergence uniforme sur tout segment, mais toujours pas convergence uniforme.

I.4. Exemples et plan d'étude pour les suites de fonctions.

Comment étudier un suite de fonctions (f_n) ?

E1. Pour chaque x de I, on cherche $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. On en déduit la limite simple f éventuelle.

E2. On étudie la fonction $f_n(x) - f(x)$.

— S'il existe une suite (α_n) tendant vers 0 vérifiant :

$$\forall x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

alors il y a convergence uniforme (souvent $\alpha_n = Sup|f_n(x) - f(x)|$ et est obtenu par une étude de fonction)

— s'il existe une suite (x_n) de I vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| \neq 0$$

alors il n'y a pas convergence uniforme. En général x_n est l'abscisse du point où il y a un le maximum de la fonction $|f_n(x) - f(x)|$.

Si l'on désire la CUS, on remplace I par un segment quelconque de I.

Exercice. [4] Étudier la convergence des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$ 2. $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1[$ 3. $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$ sur $\mathbb{R}^+$

4. $f_n(x) = \dfrac{\sqrt{n}x}{e^{nx}}$ sur $\mathbb{R}^+$ 5. $f_n(x) = \dfrac{n(x^2-4)}{1+n(x+2)}$ sur $[-2;2]$

I.5. Séries de fonctions.

Remarques préliminaires. Comme une série est une suite particulière, il y a encore les trois types de convergence vus précédemment. Cependant :

1. Les limites des séries sont souvent plus difficiles à déterminer que les limites de suites. On se contente donc souvent de donner le type de convergence sans préciser la limite. La limite d'une série de fonctions $\sum f_n$ est alors notée $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_n$.
2. Ainsi l'expression $S - S_n$ lorsque $(S_n) = \sum f_n$ est une série de fonctions peut être remplacée par le reste de la série :
$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$
3. Il existe un 4$^{\text{ième}}$ type de convergence : la convergence normale. On pourra commencer par étudier la convergence normale ou simple. Par contre il faudra quand même toujours étudier la convergence simple avant la convergence uniforme pour avoir l'existence du reste.

Définitions.

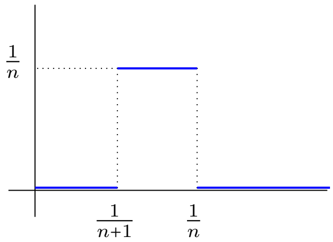
1. Reformulation des 3 modes de convergence déjà vus :
   - $\sum f_k$ CS $\iff$ $\forall x \in I,\ \sum f_n(x)$ converge
   - $\sum f_k$ CU $\iff$ $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$
   - $\sum f_k$ CUS $\iff$ $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$ sur tout segement de I
2. un autre mode de convergence : la convergence normale :
   - $\sum_{k=0}^{n} f_k$ CN $\iff$ $\sum \|f_n\|_\infty$ converge

Propriétés.[5]

1. $\sum f_k$ CU $\implies$ $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$
2. $\sum f_k$ CN $\implies$ $\sum f_k$ CU $\implies$ $\sum f_k$ CUS $\implies$ $\sum f_k$ CS

Méthode. La contraposée du premier point peut permettre de montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément : il suffit donc de montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers 0. Par exemple, la série $\sum x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$, car (x^n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0,1[$.

Contre-exemple. Il peut y avoir convergence uniforme et pas convergence normale comme le montre l'exemple suivant. Considérons la suite de fonction (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par :



$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in \left]\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La série $\sum f_n$ converge uniformément mais pas normalement.

I.6. Exemples et plan d'étude pour les séries de fonctions.

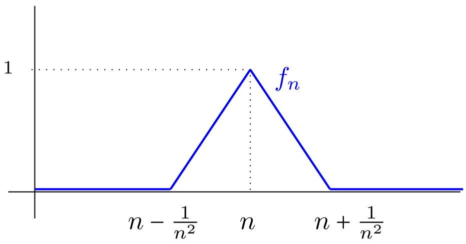
Remarques. La méthode est la même que celle pour les suites mise à part :

1. que pour la CU, on montre que le reste tend uniformément vers 0,
2. qu'il faut étudier aussi étudier la CN. Pour cela il faut étudier la convergence de la série $\sum \|f_n\|_\infty$

Exercice.[6] Étudier les séries de fonctions de terme général f_n définie par :

1. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^k}{x+k}$ sur $\mathbb{R}^+$
2. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$
3. $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0,1]$
4. $f_n(x) = \dfrac{1}{n+n^3x^2}$ sur $]0,+\infty[$

Exercice. [7] Considérons f_n la fonction de $\mathbb{R}^+$ définie par le graphe suivant :



1. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement. On ne cherchera pas à exprimer sa limite f.
2. Montrer qu'il n'y a pas CU.
3. Montrer que f est intégrable et pourtant $f(x)$ ne tend pas ver 0 en $+\infty$.

I.7. Stabilité par combinaison linéaire, produit de fonctions bornées.

Théorème. [8] Soient λ, μ dans $\mathbb{K}$ et (S_n), (T_n) des suites ou des séries de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, alors :

$$\begin{cases} S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} S \\ T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} T \end{cases} \implies \lambda.S_n + \mu.T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} \lambda.S + \mu.T$$

On peut remplacer CS par CUS, CU, CN et le théorème reste vrai.

Théorème. [9] Soient (S_n), (T_n) des suites ou des séries de fonctions de I dans $\mathbb{K}$, alors :

1. $\begin{cases} S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} S \\ T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} T \end{cases} \implies S_n.T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} S.T$

2. $\begin{cases} S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} S \\ T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} T \\ S,\ T \text{ bornées} \end{cases} \implies S_n.T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} S.T$

Exercice. [10] Considérons la suite de fonctions $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ définies sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. Montrer que (f_n^2) ne converge pas uniformément vers f^2 sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que le produit de suites de fonctions qui convergent uniformément, ne converge **pas** uniformément en général.

II. Propriétés conservées ou non par CS/CU.

Une propriété P est conservée par CS (resp. CUS/CU/CN) si et seulement si pour toute suite de fonction (f_n), on a :

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \\ \text{Chaque } f_n \text{ a la propriété } P \end{cases} \Longrightarrow \quad f \text{ a la propriété } P$$

II.1. Conservation de l'ordre.

Théorème. [11] Soient (f_n) et (g_n) des suites de fonctions convergent simplement vers f et g alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad f_n \leq g_n \quad \Longrightarrow \quad f \leq g$$

Il en est donc de même si la convergence est une CUS, CU, CN.

Conséquences. [12] La CS (et donc la CUS/CU/CN) conserve toutes les notions définies par une égalité ou une inégalité. Par exemple, elle conserve :

1. la parité,
2. la périodicité (avec une période commune pour toutes les fonctions de la suite),
3. la positivité,
4. la monotonie,
5. les fonctions λ-lipschitzienne (avec un λ commun pour toutes les fonctions de la suite),
6. les applications linéaires.

Exercice - limite de fonctions lipschitziennes. [13] Soit f_n une application de $\mathbb{R}$ qui soit λ_n lipschitzienne et telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$.

1. Supposons dans cette question que $I = \mathbb{R}^+$ et que :

$$f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$$

   Montrer que f_n converge uniformément vers la fonction racine.
2. En déduire que la limite uniforme (donc simple aussi) de fonctions lipschitziennes n'est pas forcément lipschitzienne.
3. Montrer que si la suite (λ_n) est bornée alors f est lipschitzienne.

Exercice - limite de fonctions bornées. [14] Soit (f_n) une suite d'applications bornées qui converge simplement vers f.

1. Montrer que f peut ne pas être bornée.
2. Montrer que s'il existe une même constante M qui majore tous les f_n, alors f est bornée
3. Montrer que si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ alors f est bornée.

II.2. Non conservation de l'injectivité et de la surjectivité.

Exercice.[15] Soient n dans $\mathbb{N} \setminus \{0;1\}$ et f_n, g_n les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{n} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ x - \frac{1}{n} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad\qquad g_n(x) = \frac{1}{n}\arctan(x)$$

1. Tracer les fonctions f_n et g_n. Sont-elles injectives ? Surjectives ?
2. Montrer que f_n et g_n convergent uniformément vers des fonctions f et g que l'on précisera. Les applications f et g sont-elles injectives ? surjectives ?
3. En déduire l'injectivité et la surjectivité ne sont pas conservées par CS ou CU.

II.3. Conservation de continuité par CU.

Théorème.[16]

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CUS}} f \\ f_n \text{ continues sur } I \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad f \text{ continue sur } I$$

Remarques.

1. Comme le montre l'exemple la suite $f_n(x) = x^n$ définie sur $[0,1]$, la convergence simple ne conserve pas la continuité.
2. On remarque que si
$$\begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \\ f_n \text{ continues sur } I \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} \\ f \text{ non continue sur } I \end{cases}$$
la convergence ne peut pas être uniforme. C'est un moyen simple et efficace de montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Exercice.[17] Considérons la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-n.x^2}$. Montrer que (f_n) converge simplement vers une application f que l'on déterminera puis montrer que la convergence n'est pas uniforme.

II.4. Non conservation de la dérivabilité.

Exercice.[18] Posons $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément vers une application f que l'on déterminera.
2. En déduire que la dérivabilité n'est pas conservée par CS/CU/CUS

II.5. Polynômes.

Exercice.[19] Soit (P_n) une suite de polynômes définis sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si l'on n'a que $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ sur $\mathbb{R}$, on peut très bien avoir f non polynôme.
2. Montrer que si $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur $\mathbb{R}$ alors f est un polynôme.

   Indice : on pourra montrer qu'à partir d'un certain rang N, $P_n - P_N \in \mathbb{R}$.
3. Supposons à présent $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ et que la suite de polynômes soit une suite de $\mathbb{R}_m[X]$ avec m dans $\mathbb{N}$. Montrer que f est un polynôme.

Théorème - Bernstein-Weierstrass.[20] Toute fonction continue sur un **segment** est limite uniforme d'une suite de polynômes.

II.6. Résumé.

Résumé des propriétés conservées ou non. Déterminer si les propriétés suivantes sont conservées par CS, CUS ou par CU.

	Propriété conservée par	CS	CUS	CU
1.	Positivité	Oui	Oui	Oui
2.	Injectivité	Non	Non	Non
3.	Surjectivité	Non	Non	Non
4.	Continuité	Non	Oui	Oui
5.	Dérivabilité	Non	Non	Non
6.	Être bornée	Non	Non	Oui
7.	Être bornée de manière uniforme*	Oui	Oui	Oui
8.	Être lipschitzienne	Non	Non	Non
9.	Être λ-lipschitzienne	Oui	Oui	Oui
10.	Être une application linéaire	Oui	Oui	Oui
11.	Être un polynôme sur un segment	Non	Non	Non
12.	Être un polynôme sur $\mathbb{R}$	Non	Non	Oui

(*) bornée de manière uniforme signifie qu'il existe un M qui borne tous les f_n, c'est-à-dire : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq M$

III. Interversion de limites.

III.1. Interversion limite-intégrale.

Théorème.[21] Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur le segment $[a,b]$.

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n \;=\; \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n \;=\; \int_a^b f$$

Remarques.[22]

1. On suppose les fonctions f_n continues pour avoir automatiquement f continue grâce au théorème de conservation de la continuité par CU. On est ainsi sûr que $\int_a^b f$ a un sens. On peut très bien supposer les f_n juste continues par morceaux, mais dans ce cas il faut :
   - Soit améliorer notre construction de l'intégrale pour donner un sens aux intégrales des limites des fonctions continues par morceaux (cad les fonctions réglées). Ça existe, mais c'est hors programme.
   - Soit remplacer l'hypothèse f_n continues par f_n continues par morceaux **et** f continue par morceaux.

   Le programme propose le théorème qui est dans l'encadré.
2. Le théorème est faux si l'intégrale n'est pas sur un segment. Prendre
$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad x \in [0,n] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [n,+\infty[\end{cases}$$
3. Le théorème est faux s'il n'y a pas convergence uniforme. Prendre pour $n \geq 2$ la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad x \in \left[0;\frac{1}{n}\right] \\ 2n - n^2 x & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{n};\frac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{2}{n};1\right] \end{cases}$$
4. Reformulation dans le cadre des séries de fonctions. Le théorème est alors appelé intégration termes à termes. Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur le segment $[a,b]$ telle que la série $\sum f_n$ converge uniformément alors
$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n$$

Exercice - théorème des moments.[23] Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ vérifiant :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \int_a^b f(t)P(t)dt \;=\; 0$$

1. Montrer en utilisant le théorème de Bernstein que : $\displaystyle\int_a^b f^2 = 0$.
2. En déduire que $\mathbb{R}[X]^{\perp} = \{0\}$ dans l'espace pré-hilbertien $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$

Exercice.[24]

1. Soient n et p dans $\mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale suivante est convergente, puis la calculer :
$$I_{pn} = \int_0^1 x^p \ln^n(x) dx$$
2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, notons f_n l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln^n(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
On note également $f_0 = 1$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'application f_n est continue et bornée.
3. Pour tout x de $[0,1]$, notons :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n f_n(x)}{n!}$$
Montrer que la convergence définissant f est uniforme.
4. En déduire que :
$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

III.2. Interversion limite-dérivabilité.

Rappel. La dérivabilité n'est pas conservée par CS/CU/CUS/CN.

Théorème de dérivation des suites de fonctions.[25] Soit (f_n) une suite de fonctions C^1 sur I telle que :
$$\begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \\ f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CUS}} g \end{cases} \implies f \text{ est } C^1 \text{ et } f' = g$$
De plus la convergence de f_n vers f est uniforme sur tout segment.

Théorème C^p des suites de fonctions.[26] Soit (f_n) une suite de fonctions C^p sur I qui converge simplement vers f et telle que :
$$\begin{cases} \left(f_n^{(k)}\right) \text{ CS} & \text{pour k < p} \\ \left(f_n^{(p)}\right) \text{ CUS} & \end{cases} \implies f \text{ est } C^p \text{ et } f^{(p)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(p)}$$

De plus la convergence de (f_n) vers f est uniforme sur tout segment.

Remarque. S'il s'agit d'une série de fonctions, les théorèmes s'appellent théorèmes de dérivation termes à termes et s'énoncent ainsi (avec la même régularité que des fonctions (f_n) des théorèmes précédents :

$$\begin{cases} \sum f_n \text{ CS} \\ \sum f'_n \text{ CUS} \end{cases} \Longrightarrow \quad \sum f_k \text{ est } C^1 \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k$$

et

$$\begin{cases} \sum f_n^{(k)} \text{ CS} \quad \text{pour k < p} \\ \sum f_n^{(p)} \text{ CUS} \end{cases} \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \text{ est } C^p \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)^{(p)} = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k^{(p)}$$

Exercice.[27] Montrer que la fonction :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(3^n x)}{4^n}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer f'.

III.3. Interversion limite-limite.

Théorème de la double limite.[28] Soit (f_n) une suite (ou une série) de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ et a une extrémité de I. Si

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f \\ f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n \end{cases} \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} l_n \text{ et } \lim_{x\to a} f(x) \text{ existent et sont égales.}$$

On peut résumer la situation sur le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Hypothèses}} & f_n \arrow[r, "x \mapsto a"'] \arrow[d, "CU"'] & l_n \arrow[d, dotted, "n \mapsto +\infty"] & \\ & f \arrow[r, dotted, "x \mapsto a"'] & l & \boxed{\text{Conclusion}} \end{tikzcd}$$

Sous forme condensée, on peut écrire :

$$\lim_{x\to a} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

Exercice. [29] Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

1. En utilisant le théorème de la double limite et que sur $]0,1|$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

2. Sans utiliser le théorème de la double limite et en intégrant la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-x)^k$.

IV. Application aux fonctions définies par une série.

IV.1. Comment étudier de telles fonctions ?

Méthode. Soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

- **Domaine de définition.** Pour montrer que f est définie sur I, on montre que :

$$\forall x \in I, \quad \begin{cases} x \text{ est dans le domaine des } f_n \\ \sum f_n(x) \text{ converge} \end{cases}$$

- **Continuité de *f*.** Pour montrer que f est continue sur I, on applique le théorème de conservation de la continuité par CUS en montrant que :

$$\begin{cases} \text{tous les } f_n \text{ sont continues sur } I \\ \sum f_n \text{ CUS sur } I \end{cases}$$

- **Dérivabilité *f*.** Pour montrer que f est dérivable sur I, on applique le théorème de dérivation sous le signe somme en montrant que :

$$\begin{cases} \text{tous les } f_n \text{ sont dérivables sur } I \\ \sum f_n \text{ CS sur } I \\ \sum f_n' \text{ CUS sur } I \end{cases}$$

- **Classe $\mathbf{C^\infty}$ de *f*.** Pour montrer que f est de classe C^∞ sur I, on montre que f est C^p grâce au théorème de dérivation C^p que nous rappelons :

$$\begin{cases} \text{tous les } f_n \text{ sont } C^p \text{ sur } I \\ \sum f_n^{(k)} \text{ CS pour } k < p \\ \sum f_n^{(p)} \text{ CUS} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \sum f_n \text{ est } C^p$$

IV.2. Exemples.

Exercice. [30] Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x}{x^2+k^2}$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, puis qu'elle est continue.
2. En utilisant le théorème de la double limite, montrer que : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\pi^2}{6}x + o(x)$.
3. En utilisant le théorème de comparaison série-intégrale, montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice - fonction Zéta de Riemann. [31] Notons ζ la fonction de $]1;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Montrer que ζ est continue sur I.
2. Montrer que pour tout p de $\mathbb{N}$, la série $\sum \frac{\ln^p(n)}{n^x}$ converge uniformément sur tout segment de I.
3. Montrer que ζ est C^∞ sur I. Que vaut $\zeta^{(p)}$ pour p dans $\mathbb{N}$?
4. Montrer à l'aide du théorème de la double limite que :

$$\zeta(x) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^x}$$