Probabilités.

PSI

Chapitre 5

I. Modélisation de l'expérience.

I.1. Ensembles dénombrables

Définitions.

1. Un ensemble est dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
2. Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est fini ou s'il est dénombrable.

Résultats en vrac sur les dénombrables.

1. Tout ensemble au plus dénombrable peut être écrit en extension sous la forme $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ou $\{x_1, x_2, \ldots\}$.
2. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables tandis que $\mathbb{R}$ et tout intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide ne sont pas dénombrables.
3. Un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est encore dénombrable.
4. Une réunion au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est encore dénombrable. C'est-à-dire pour tout ensemble I au plus dénombrable :

$$\forall i \in I,\ A_i \text{ dénombrable} \implies \bigcup_{i\in I} A_i \text{ dénombrable}$$

5. Tout sous-ensemble d'un dénombrable est au plus dénombrable.

I.2. Comment modéliser une expérience aléatoire ?

Pour modéliser une expérience aléatoire, on a besoin de 3 objets :

1. Un *univers* : ensemble qui représente les issues possibles de l'expérience.
2. Des *événements* : ce sous des sous-ensembles de l'univers.
3. Une *probabilité* : elle mesure la "chance" de voir un événement réalisé.

I.3. L'univers

Définition. A chaque issue de l'expérience, on associe un objet mathématique. L'ensemble de ces objets est appelé *univers* ou *ensemble des possibles.* On le note très souvent Ω.

Exemples.

1. On jette un dé à 6 faces, on peut prendre $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
2. On jette deux dés à 6 faces l'un après l'autre, on peut prendre $\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,6)\} = \{1,2,3,4,5,6\}^2$.
3. On jette deux dés à 6 faces simultanément, on peut prendre Ω l'ensemble des 2-combinaison de $\{1,2,3,4,5,6\}^2$.
4. On joue à pile ou face 5 fois de suite, on peut prendre $\Omega = \{P,F\}^5$
5. On regarde la durée de vie d'une ampoule, on peut prendre $\Omega = \mathbb{R}^+$

I.4. Les événements.

Définition.

1. Un événement A est un sous-ensemble de Ω. L'événement A est réalisé si et seulement si le résultat de l'expérience aléatoire appartient à A. On note en général $\mathcal{A}$ l'ensemble des événements.
2. Il y a certaines contraintes pour choisir les événements. On devra avoir :
   - $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire,
   - $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable,
   - $\Omega \in \mathcal{A}$.

   On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu.
3. Un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ avec $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω est appelé un espace probabilisable.

Propriétés.[1] Toute tribu contient $\varnothing$ et est stable par intersection dénombrable.

Remarques.

1. Quand Ω est dénombrable, on prend très souvent $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
2. Même si Ω est dénombrable, $\mathcal{A}$ peut très bien ne pas l'être.

Vocabulaire.

Événements	Ensembles
Événement certain	Ω
Événement impossible	$\varnothing$
A et B	$A \cap B$
A ou B	$A \cup B$
A et B incompatibles	$A \cap B = \varnothing$
Événement contraire de A	$\bar{A}$
Événement élémentaires	singletons
Il existe un A_i réalisé	$\bigcup_{i \in I} A_i$
Tous les A_i sont réalisés	$\bigcap_{i \in I} A_i$

Exemple. On lance un dé à 6 faces. On prend $\Omega = \{1, \dots, 6\}$.

Événement A : "le résultat est paire"	:	$A = \{2, 4, 6\}$
Événement A : "le résultat est supérieur ou égal à 5 "	:	$A = \{5, 6\}$
Événements élémentaires	:	$\{1\}$, $\{2\}$, $\dots$, $\{5\}$, $\{6\}$

I.5. Réunion disjointe.

Définition. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles.

1. $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$ désigne à la fois
   — l'ensemble : $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ et
   — la proposition : $A_1, \dots, A_n$ incompatibles deux à deux (disjoints deux à deux).

2. De même pour une infinité d'ensembles : $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots$ ou encore $\displaystyle\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ est :
   — l'ensemble : $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ et
   — la proposition : $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ incompatibles deux à deux (disjoints deux à deux).

Propriété.[2] L'intersection est en quelque sorte distributive par rapport à la réunion disjointe c'est-à-dire Pour une famille (A_i) d'événements incompatibles deux à deux et pour tout événement B, on a :

Cas fini $$B \cap (A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n) = (B \cap A_1) \sqcup \dots \sqcup (B \cap A_n)$$

Cas infini $$B \cap \bigsqcup_{i\in I} A_i = \bigsqcup_{i\in I} (B \cap A_i)$$

Remarque. Comme pour la somme directe de sev $F \oplus G$, la réunion disjointe est à la fois un ensemble et une proposition. Ainsi, pour montrer que $A = B \sqcup C$, il faut montrer que $A = B \cup C$ et $B \cap C = \varnothing$.

I.6. Probabilité.

Définitions.

1. Notons Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Une probabilité p est une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$ vérifiant :
   - $p\left(\Omega\right) = 1$
   - $p\left(\displaystyle\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} p(A_i)$ pour toute suite d'événements incompatible $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
2. Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ est appelé un espace probabilisé.
3. Un événement est dit presque sûr si $p(A) = 1$ et négligeable si $p(A) = 0$.

Remarque. Pour toute suite d'événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la série $\sum p(A_i)$ est une série à termes positifs, elle a donc une limite dans $\overline{\mathbb{R}}^+$. Cette limite sera notée $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} p(A_i)$. Ainsi les égalités ou les inégalités de la suite du chapitre sont à prendre dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Propriétés.[3] Soient n dans $\mathbb{N}$ et A, B, A_i avec i dans $\{1,\ldots,n\}$ des événements :

1. $p(\varnothing) = 0$.
2. $p(A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n) = p(A_1) + \ldots + p(A_n)$ (le point 2 de la définition pour une réunion finie).
3. Si $A \subset B$ alors $p(A) \leq p(B)$.
4. $p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B)$
5. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
6. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
7. $p\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=0}^{n} p(A_i)$ (sous additivité)

Propriétés et monotonie.[4]

1. Si (A_i) est croissante alors : $\lim_{i\to+\infty} P(A_i) = P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right)$ (continuité croissante)
2. Si (A_i) est décroissante alors : $\lim_{i\to+\infty} P(A_i) = P\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right)$ (continuité décroissante)

Exercice.[5] Soit (A_n) une suite d'événements. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$$

Exercice.[6] On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir face. Montrer que l'événement A="le jeu s'arrête" est presque sûr. Pourtant cela ne signifie pas que le jeu se finisse.

Exercice.[7] Soient p_1 et p_2 dans $]0,1]$. Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de toucher à chaque tour et le second la probabilité p_2.

1. Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
2. Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

I.7. Système complet d'événements.

Définitions.

1. La famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ de $(\Omega, \mathcal{A})$ est un système complet dénombrable d'événements (SCDE) si et seulement si :
$$\Omega = \bigsqcup_{i\in I} A_i \quad \text{et} \quad I \text{ est au plus dénombrable}$$
2. La famille d'événements $(A_i)_{i\in I}$ de $(\Omega, \mathcal{A})$ est un système quasi-complet dénombrable d'événements (SQCDE) si et seulement si :
$$\bigsqcup_{i\in I} A_i \text{ presque sûr} \quad \text{et} \quad I \text{ est au plus dénombrable}$$

Exemple.

1. (A, B) est un SCDE si et seulement si $B = \bar{A}$.
2. (A, B, C) est un SCDE si et seulement si $\Omega = A \sqcup B \sqcup C$.

Remarques.

1. Moralement, un SQCDE est un SCDE dans lequel on a enlevé certains/tous les événements négligeables.
2. Un SCDE est l'équivalent en langage probabiliste d'une partition, à une exception près. Dans une partition les ensembles doivent être non vides, ce n'est pas demandé dans un SCDE.
3. Dans un SCDE, quitte à compléter par des ensembles vides et à renuméroter les éléments, on peut toujours considérer que la famille est indexée par $\mathbb{N}$. Par exemple, si les SCDE est (A, B, C), il devient $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $A_0 = A$, $A_1 = B$, $A_2 = C$ et $A_p = \varnothing$ pour $p \geq 3$.

Exemple. On tire une boule dans une urne contenant des boules rouges et vertes. Considérons les événements :

- A_1="La boule tirée est un boule rouge"
- A_2="La boule tirée est une boule verte"

Alors (A_1, A_2) est un système complet d'événements.

I.8. Propriétés fondamentales dans le cas dénombrable.

Propriétés.[8] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé avec Ω **dénombrable** et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

1. Une probabilité est entièrement déterminée par ses valeurs sur les événements élémentaires.
2. De plus :
   - Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (donc A est fini) alors : $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(\{a_i\})$
   - Si $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ (donc A est dénombrable) alors : $p(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} p(\{a_i\})$

Remarques.

1. Ainsi pour définir une probabilité sur un espace $(\Omega, \mathcal{A})$ avec Ω dénombrable, il suffit de choisir les valeurs des probabilités des événements élémentaires de telle sorte que leur somme fasse 1.
2. On admettra que la somme $\sum_{i=0}^{+\infty} p(\{a_i\})$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les éléments a_i. Ceci est vrai car les séries considérées sont à termes positifs

Exemple. On lance un dé à 6 faces et on prend $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Exemple de probabilités :

x_i	1	2	3	4	5	6	Commentaire
$p_1(x_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	Equiprobabilité
$p_2(x_i)$	0	0	0	0	0	1	Dé pipé faisant toujours 6
$p_3(x_i)$	0	1/6	1/6	1/6	2/6	1/6	Dé où le 1 a été transformé en 5

Exemple - l'équiprobabilité. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable avec Ω **fini**. La probabilité :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas total}}$$

est appelé équiprobabilité ou probabilité uniforme, puisque les événements élémentaires ont tous la même probabilité : $\frac{1}{card(\Omega)}$.

II. Probabilité conditionnelle

II.1. Définition

Définition. Soit A et B des événements tels que $P(B) \neq 0$. On définit la probabilité de A sachant B, noté $P_B(A)$ ou $P(A|B)$, par :

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple. On lance un dé à six faces parfaitement équilibré et on note B l'événement "Le résultat est paire".

A	$p(A)$	$P(A\|B)$
$\{1\}$	$1/6$	0
$\{2\}$	$1/6$	$1/3$
$\{3\}$	$1/6$	0
$\{4\}$	$1/6$	$1/3$
$\{5\}$	$1/6$	0
$\{6\}$	$1/6$	$1/3$

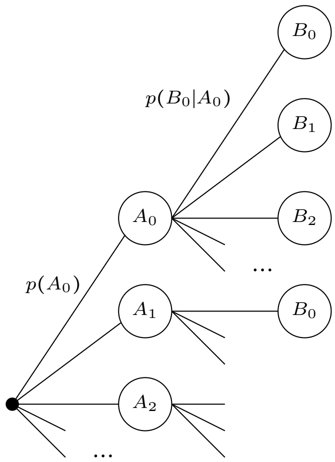
Proposition.[9] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé et B, C, D des événements.

1. p_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$
2. De plus si les probabilités suivantes ont un sens, on a (formule des probabilités composées) :
   - $p(B \cap C) = p(B)\, p(C|B)$
   - $p(B \cap C \cap D) = p(B)\ p(C|B)\, p(D|B \cap C)$

Exercice.[10] Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

II.2. Présentation sous forme d'arbre

Dès que l'on a au moins 2 SCDE $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$, on peut présenter la situation sous forme d'arbre.



Sur les noeuds de la première colonne apparait le premier SCDE $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Sur la deuxième colonne apparait le deuxième SCDE $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ répété autant de fois qu'il y a d'éléments dans le premier SCDE. Sur les flèches reliant la racine à un A_i, on indique la probabilité $p(A_i)$ et sur les flèches reliant un A_i à un B_j, on inscrit la probabilité de B_j sachant A_i.

Pour avoir $p(A_i \cap B_j)$, on multiplie les probabilités rencontrées sur le chemin :

$$\mathit{Racine} \longrightarrow A_i \longrightarrow B_j$$

Exercice. [11] On lance une pièce bien équilibrée deux fois de suite. Présenter la situation sous forme d'arbre.

II.3. Principe des probabilités totales

Théorème. [12] Soit $(A_i)_{i\in I}$ un SCDE indexé par un ensemble I au plus dénombrable et B un événement. On a alors :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

On admet que l'ordre dans lequel sont sommés les termes de la somme précédente n'influence pas la valeur de cette somme. Plus de détails dans le chapitre 'variables aléatoires'.

Convention. On convient que dans le cas où $P(A_i) = 0$, on a : $P(B|A_i)P(A_i) = 0$. On peut donc utiliser le théorème des probabilités totales même avec des événements A_i de probabilité nulle. Cependant il parait tout aussi naturel de les enlever de la famille (A_i) puisqu'il n'interviennent pas dans la somme. On peut donc utiliser le théorème des probabilités totales avec un SQCDE au lieu d'un SCDE.

Remarques. Dans une présentation sous forme d'arbre à 2 colonnes, le théorème des probabilités totales indique que pour trouver la probabilité d'un évènement B se trouvant dans la $2^{\text{ième}}$ colonne, il suffit :

1. de repérer tous les chemins allant de la racine à un B ;
2. pour chacun de ces chemins, on fait le produit des probabilités rencontrées (on trouve $P(B|A_i)P(A_i)$) ;
3. On additionne tous les résultats trouvés en 2.

Exercice. [13] On dispose de 2 dés à 6 faces, un parfaitement équilibré et un faisant 6 systématiquement. On choisit un dé au hasard, puis on le lance. Quelle est la probabilité de faire 6 ?

II.4. Formule de Bayes

Théorème. [14] Soient A et B des événements de probabilités non nulles. On a alors :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Conséquences. [15] En combinant, la formule de Bayes avec la formule des probabilités totales, on obtient, pour un SCDE $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de probabilités non nulles et un évènement B de probabilité non nulle :

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{k=0}^{+\infty} P(B|A_k)P(A_k)}$$

Exercice. [16] On dispose de 2 dés à 6 faces, un parfaitement équilibré et un faisant 6 systématiquement. On choisit un dé au hasard, puis on le lance. On obtient 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé pipé ?

Exercice. [17] On cherche un objet dans un meuble constitué de sept tiroirs. La probabilité qu'il soit effectivement dans ce meuble est p. Sachant qu'on a examiné les six premiers tiroirs sans succès, quelle est la probabilité qu'il soit dans le septième ?

II.5. Événements indépendants

Définitions.

1. Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
2. Trois évènements A, B, C sont (mutuellement) indépendants si et seulement si :

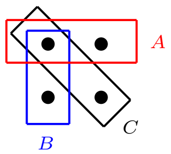
$$\begin{cases} P(A \cap B \cap C) & = & P(A)P(B)P(C) \\ P(A \cap B) & = & P(A)P(B) \\ P(A \cap C) & = & P(A)P(C) \\ P(B \cap C) & = & P(B)P(C) \end{cases}$$

3. Généralisons, les évènements $(A_i)_{i \in I}$ sont (mutuellement) indépendants si et seulement si :

$$\forall J \subset I, \quad J \text{ finie} \implies P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Remarques.

1. (A_i) mutuellement indépendants implique (A_i) indépendants 2 à 2 (cad A_i et A_j indépendants pour tout $i \neq j$).
2. Par contre la réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant. Considérons un univers composé de 4 éléments $\Omega = \{a, b, c, d\}$ muni de la probabilité uniforme et des évènements $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$ et $C = \{a, d\}$. La situation peut être représenté ainsi :



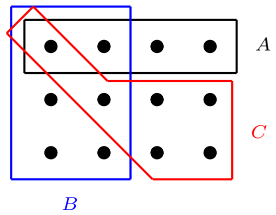
Les évènements sont bien indépendants deux à deux puisque :

$$P(A)P(B) = P(A)P(C) = P(B)P(C) = \frac{1}{4} = P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C)$$

Ils ne sont pas mutuellement indépendant puisque :

$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = P(A \cap B \cap C)$$

Exercice.[18] Considérons un univers à 12 éléments muni de la probabilité uniforme et les évènements A, B et C suivants :



1. Vérifier que : $P(A)P(B)P(C) = P(A \cap B \cap C)$.
2. Montrer que A B et C ne sont pas indépendants.

Ainsi pour montrer que 3 évènements A, B, C sont indépendants, il ne suffit pas de montrer que $P(A)P(B)P(C) = P(A \cap B \cap C)$.

Exercice.[19] On lance deux dés équilibrés à 6 faces. Montrer que les deux événements suivants sont indépendants :

A	"Le premier dé est pair."
B	"La somme des dés est paire."

Exercice.[20]

1. Montrer que si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$, le complémentaire de B, sont indépendants
2. Soient A_1, ..., A_n des événements indépendants et pour tout i de $[\![1, n]\!]$, prenons B_i dans $\{A_i, \overline{A_i}\}$. Montrer que B_1, ..., B_n sont des événements indépendants

II.6. Indépendance et probabilité conditionnelle.

Proposition.[21] A condition que les probabilités conditionnelles suivantes aient un sens,

1. Les événements A et B sont indépendants si et seulement si :
$$P(A|B) = P(A) \quad \text{et} \quad P(B|A) = P(B)$$
2. Les événements A, B et C sont indépendants si et seulement si :
$$\begin{array}{lll} P(A|B) = P(A) & P(A|C) = P(A) & P(A|B \cap C) = P(A) \\ P(B|A) = P(B) & P(B|C) = P(B) & P(B|A \cap C) = P(B) \\ P(C|A) = P(C) & P(C|B) = P(C) & P(C|A \cap B) = P(C) \end{array}$$

Remarques.

1. Ce résultat se généralise bien sûr à n évènements, mais c'est beaucoup plus lourd à écrire qu'à comprendre.
2. En d'autres termes, si des évènements sont indépendants, savoir que certains sont réalisés ou non ne donne aucune information sur la réalisation possible des autres.

III. Variables aléatoires discrètes.

III.1. Définition.

Définitions.

1. Une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans F est une application X définie de Ω dans F telle que :
   — F est au plus dénombrable.
   — Pour tout élément x de E, $X^{-1}(\{x\})$ soit un événement c'est-à-dire appartienne à $\mathcal{A}$
2. Une variable aléatoire est réelle si $F \subset \mathbb{R}$.

Programme PSI. Il existe des variables aléatoires non discrètes, c'est-à-dire des applications dans un ensemble F non dénombrable, mais c'est hors programme. Les variables aléatoires seront dorénavant des variables aléatoires discrètes.

Intérêts.

1. L'intérêt d'une variable aléatoire est de changer l'univers Ω en un univers F plus adapté à ce qu'on souhaite mesurer.
2. La tribu associée à F est alors $\mathcal{P}(F)$, ce qui signifie que tout sous-ensemble de F est un événement.
3. L'univers Ω n'est en général plus explicité puisque seul $X(\Omega)$ est important.

Notations.

1. Pour alléger les notations, on définit les ensembles suivants, avec $a \in E$ et $A \subset E$:

$$\begin{array}{ccccc} \{X = a\} & \underset{\text{def}}{=} & (X = a) & \underset{\text{def}}{=} & \{\,\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) = a\,\} \\ \{X \in A\} & \underset{\text{def}}{=} & (X \in A) & \underset{\text{def}}{=} & \{\,\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \in A\,\} \end{array}$$

2. Si X est une variable aléatoire réelle, on a aussi :

$$\begin{array}{ccccc} \{X \geq a\} & \underset{\text{def}}{=} & (X \geq a) & \underset{\text{def}}{=} & \{\,\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \geq a\,\} \\ \{X \leq a\} & \underset{\text{def}}{=} & (X \leq a) & \underset{\text{def}}{=} & \{\,\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) \leq a\,\} \\ \{X > a\} & \underset{\text{def}}{=} & (X > a) & \underset{\text{def}}{=} & \{\,\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) > a\,\} \\ \{X < a\} & \underset{\text{def}}{=} & (X < a) & \underset{\text{def}}{=} & \{\,\omega \in \Omega \,/\, X(\omega) < a\,\} \end{array}$$

3. Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors les probabilités de ces événements sont notés : $P(X \in A)$, $P(X = a)$, $P(X \geq a)\ldots$

Exemple. On regarde la durée de vie en jours d'une ampoule fabriquée dans une usine et on considère X la variable aléatoire à valeurs dans $F = \{\text{'Très bien'}, \text{'Bien'}, \text{'Passage'}, \text{'Nul'}\}$ définie par :

$$X(\omega) = \begin{cases} \text{'Nul'} & \text{si } \omega \in [0;100[\\ \text{'Passable'} & \text{si } \omega \in [100;300[\\ \text{'Bien'} & \text{si } \omega \in [300;1000[\\ \text{'Très bien'} & \text{si } \omega \in [1000;+\infty[\end{cases}$$

Cet exemple montre un exemple où l'univers Ω n'est pas dénombrable et pourtant la variable est discrète. Il donne également un exemple d'une variable aléatoire non réelle.

III.2. Loi d'une variable aléatoire.

Définitions.

1. Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans F. La loi de X est l'application :

$$P_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(F) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) \end{array}$$

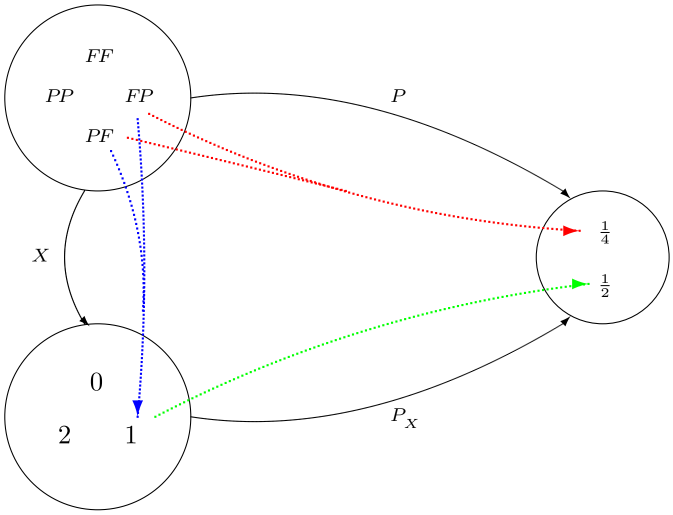
2. Deux variables aléatoires X et Y ont/suivent la même loi si $P_X = P_Y$, on note $X \sim Y$.

Méthode.[22] La loi de la variable aléatoire discrète X est entièrement déterminée par :

- $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
- Les probabilités $P(X = x_k)$ avec x_k dans $X(\Omega)$.

Ainsi, en pratique, lorsqu'on demande la loi de X, il faut fournir ces 2 informations.

Exemple. On joue à pile ou face deux fois de suite. On prend $\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$ comme univers et on considère la variable aléatoire X qui compte le nombre de Pile réalisé. On a alors $F = \{0, 1, 2\}$ et le schéma suivant :



Propositions.[23]

1. Le triplet $(F, \mathcal{P}(F), P_X)$ est un espace probabilisé.
2. Les variables aléatoires X et Y suivent la même loi $(X \sim Y)$ si et seulement si

$$\begin{cases} P(X = a) = P(Y = a) & \text{si } a \in X(\Omega) \cap Y(\Omega) \\ P(X = a) = 0 & \text{si } a \in X(\Omega) \setminus Y(\Omega) \\ P(Y = a) = 0 & \text{si } a \in Y(\Omega) \setminus X(\Omega) \end{cases}$$

3. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des variables aléatoires.

Remarque. Comme le montre la proposition 2, la loi d'une variable aléatoire ne change pas si on ajoute ou si on retire de $X(\Omega)$ des valeurs ayant une probabilité nulle. Il est donc parfois préférable lorsqu'on détermine la loi de X, de donner le support de X au lieu de $X(\Omega)$ où :

$$\text{Supp}(X) = \left\{ x \in X(\Omega) \,/\, P(X = x) > 0 \right\}$$

Exemple. On lance une pièce bien équilibrée jusqu'à obtenir pile. On note X la variable aléatoire indiquant le rang du lancé pile. On a :

$$\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ P(X = +\infty) = 0 \end{cases}$$

Ici il est préférable de prendre :

$$\begin{cases} Supp(X) = \mathbb{N}^* \\ \forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{cases}$$

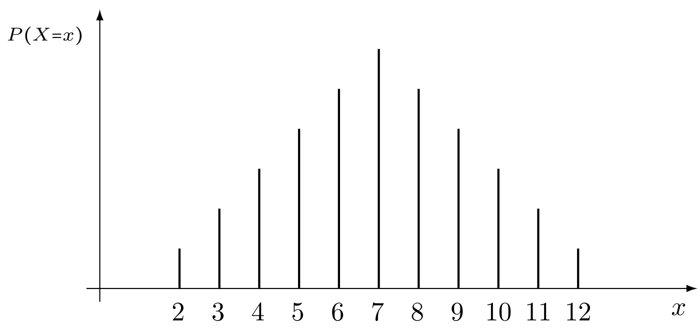
III.3. Représentation graphique d'une variable aléatoire réelle.

Définition. Pour représenter une variable aléatoire réelle, on utilise un diagramme en bâton. Les abscisses sont données par les valeurs x_i de $X(\Omega)$ et la hauteur du bâton en x_i est égale à $P(X = x_i)$.

Exemple. On lance 2 dés à 6 faces. Notons X la variable aléatoire égale à la somme des valeurs indiquées par les dés. La loi de X est définie par $X(\Omega) = \{2, 3, \ldots, 12\}$ et :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Sa représentation graphique est :



III.4. Loi conjointe de variables aléatoires discrètes

Définitions. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ à valeurs respectivement dans $F_1, \ldots, F_n$.

1. On définit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ la variable aléatoire conjointe (ou vecteur aléatoire) de $X_1, \ldots, X_n$ par :

$$X : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & F_1 \times \ldots \times F_n \\ \omega & \mapsto & (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \end{array}$$

2. La loi de $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est appelées la loi conjointe de $X_1, \ldots, X_n$.
3. Les lois de $X_1, \ldots, X_n$ sont appelées les lois marginales de $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

Remarque. Puisque X_1, ..., X_n sont discrètes, il en est de même pour la loi conjointe $X = (X_1, \dots, X_n)$. Elle est donc définie par $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X et les probabilités :

$$P\big(X = (a_1, \dots, a_n)\big) \quad = \quad P\big(X_1 = a_1 \text{ et } X_2 = a_2 \text{ et } \dots \text{ et } X_n = a_n\big)$$

avec $(a_1, \dots, a_n)$ sont dans $X(\Omega)$.

Remarques - Le cas d'un couple de variable aléatoire. Soit X et Y des variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans F et G.

1. La loi du couple (X, Y) est définie sur $F \times G$ par les probabilités :

$$P(X = a \text{ et } Y = b)$$

   avec (a, b) dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
2. les lois marginale X et Y peuvent se retrouver grâce à loi conjointe :

$$\forall b \in Y(\Omega), \quad P(Y = b) \quad = \quad \sum_{a \in X(\Omega)} P(X = a, Y = b)$$

   idem pour X. Par contre, on ne peut pas retrouver la loi conjointe à partir des lois marginales.
3. Dans le cas où X et Y prennent un petit nombre de valeurs, on écrit en général la loi du couple sous la forme d'un tableau :

	$X = x_1$	$X = x_2$	$\dots$	Total
$Y = y_1$	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_2, Y = y_1)$	$\dots$	$P(Y = y_1)$
$Y = y_2$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	$P(X = x_2, Y = y_2)$	$\dots$	$P(Y = y_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
Total	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$\dots$	1

Exercice.[24] On lance 2 dés à 6 faces et on considère les va :

$$\begin{array}{lcl} X & : & \text{valeur du premier dé} \\ Y & : & \text{maximum des deux dés} \end{array}$$

Déterminer la loi conjointe (X, Y) et les lois marginale X et Y.

III.5. Opérations sur les variables aléatoires.

Définitions. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans F et f une application de F dans G alors $f\,o\,X$ est une variable aléatoire à valeurs dans G. On la note $f(X)$, On dit que c'est l'image de X par f.

Exemples. Soient X et Y des variables aléatoires réelles définies sur le même univers.

1. Par exemple $2X + 1$, X^2, $abs(X)$ sont d'autres variables aléatoires.
2. Si λ et μ sont des réels, alors $\lambda X + \mu Y$ est encore une variable aléatoire. En effet, c'est l'image de la loi conjointe (X, Y) par la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x, y) = \lambda.x + \mu.y$.
3. De même XY, $X + Y$, $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$ par exemple sont des variables aléatoires.

IV. Chaine de Markov.

IV.1. Matrices Stochastiques.

Exercice.[25] Une matrice stochastique (resp.strictement stochastique) est une matrice à coefficients positifs (resp. strictement positis) dont la somme des coefficients de chaque ligne fait 1. On note $Sto_n(\mathbb{R})$ (resp. $Sto_n^+(\mathbb{R})$) leur ensemble. De manière formelle, on a :

$$A = (a_{ij}) \in \mathrm{Sto}_n(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} \forall i,j \in [\![1,n]\!], & a_{ij} \geq 0 \\ \forall i \in [\![1,n]\!], & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \end{cases}$$

Enfin une matrice est anti-stochastique (resp. strictement anti-stochastique) si sa transposée est stochastique (resp. strictement stochastique)

$\boxed{\text{Partie I - Caractérisation et conséquences.}}$

Notons U la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ ne contenant que des 1.

1. Montrer que :

$$M \in Sto_n(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} M \geq 0 \\ MU = U \end{cases}$$

2. En déduire que 1 est une valeur propre d'une matrice stochastique. Connait-on un vecteur propre associé à 1 ?
3. Montrer que le produit de matrices stochastiques est encore stochastique.
4. Montrer que $Sto_n(\mathbb{R})$ est un fermé convexe de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$

$\boxed{\text{Valeurs propres d'une matrice strictement stochastique}}$

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice strictement stochastique, λ une valeur propre de A et $X = (x_1 \ldots x_n)^T$ un vecteur propre associé.

1. Soit i_0 l'indice vérifiant :

$$|x_{i_0}| = \|X\|_\infty = \mathrm{Max}\Big\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\Big\}$$

Montrer que :

$$\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} x_j$$

2. Rappeler le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire de la valeur absolue, puis montrer que :

$$|\lambda| \geq 1 \implies x_1 = x_2 = \ldots = x_n$$

3. En déduire que $Ker(A - I) = \mathrm{Vect}(U)$.
4. En déduire que si $\lambda \neq 1$ alors $|\lambda| < 1$.

IV.2. Chaines de Markov.

Définition. Une chaine de Markov (homogène et discrète) est une expérience aléatoire caractérisée par un nombre fini d'états. La probabilité pour passer d'un état à un autre est fixe et entièrement déterminé par l'état actuel. On dit que le système est sans mémoire.

De manière formelle, une chaine de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un ensemble $E = [\![1,p]\!]$ appelé l'ensemble des états et vérifiant pour tous i_0, i_1,..., i_n, i, j de E et tous n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{lll} P(X_{n+1} = i \,|\, X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i \,|\, X_n = i_n) & & \text{Sans mémoire} \\ P(X_{n+1} = i \,|\, X_n = i) = P(X_n = i \,|\, X_{n-1} = j) & & \text{Homogène} \end{array}$$

Modélisation et méthode.[26]

IV.3. Exemple.

Exercice.[27] Trois joueurs A, B et C jouent au ballon :

- Le joueur A passe le ballon à B avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$
- Le joueur B passe le ballon à A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$
- Le joueur C passe le ballon à A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et à B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$

Considérons les événements suivant :

$$\begin{cases} A_n & : \text{le joueur } A \text{ a le ballon au } n^{ième} \text{ lancer.} \\ B_n & : \text{le joueur } B \text{ a le ballon au } n^{ième} \text{ lancer.} \\ C_n & : \text{le joueur } C \text{ a le ballon au } n^{ième} \text{ lancer.} \end{cases}$$

1. Déterminer une matrice M telle que pour tout n de $\mathbb{N}$

$$Y_{n+1} = M \times Y_n \qquad \text{avec} \qquad Y_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$$

2. Déterminer la limite de la suite (Y_n)