

I. Le langage de la théorie spectrale

I.1. Terminologie

Définitions. Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , u un endomorphisme de E , λ dans $\mathbb{K}$ et x dans E .

1. λ est une valeur propre (vp) de u , si et seulement s'il existe un x dans E non nul vérifiant $u(x) = \lambda.x$.
2. On note $Sp_{\mathbb{K}}(u)$ l'ensemble des vp de u dans $\mathbb{K}$ ou $Sp(u)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. C'est le spectre de u .
3. Soit λ une vp de u . Les vecteurs propres (Vp) de u associés à la vp λ sont les x non nuls de E vérifiant $u(x) = \lambda.x$.
4. Soit λ dans $\mathbb{K}$ (pas forcément une vp). On note :

$$E_{\lambda} = \{x \in E / u(x) = \lambda.x\} = Ker(\lambda Id_E - u)$$

c'est l'espace propre associée à λ . Si λ est une vp alors E_{λ} contient 0 et l'ensemble des Vp de λ .

5. Les vp, Vp et espaces propres d'une matrice carrée A sont les vp, Vp et espaces propres de l'AL canoniquement associées à A .

Remarques.

1. En particulier E_0 est le noyau de u et E_1 le sev des vecteurs invariants.
2. On voit parfois $E_{\lambda} = Ker(u - \lambda Id_E)$ ce qui est strictement identique.
3. On a l'équivalence : x vecteur propre de u si et seulement si la droite $Vect(x)$ est stable par u .

Exercice.^[1] Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des endomorphismes suivant :

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathcal{C}^{\infty} & \rightarrow & \mathcal{C}^{\infty} \\ f & \mapsto & f' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \psi : \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & XP \end{array}$$

En déduire qu'un endomorphisme peut n'avoir aucune valeur propre ou en avoir une infinité.

I.2. Propriétés des espaces propres

Propriétés.^[2] Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E , λ un élément de $\mathbb{K}$ et E_λ l'espace propre associé à λ .

1. E_λ est un sev de E stable par u .
2. Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \bullet \quad \lambda \text{ est une vp de } u \\ \bullet \quad E_\lambda \neq \{0\} \\ \bullet \quad \dim(E_\lambda) \neq 0 \\ \bullet \quad \lambda Id_E - u \text{ est non injective.} \end{array}$$

3. 0 est vp $\iff u$ non injective.
4. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de u . On a alors :

$$E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$$

Ainsi,

Conséquences.^[3]

1. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distincts est libre.
2. Si E soit de dimension finie n alors u admet au plus n valeurs propres distinctes.

Remarque importante. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp d'un endomorphisme E de dimension finie. En recollant les bases des espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$, on obtient une famille libre. On la complète en une base β à l'aide du théorème de la base incomplète. Dans cette base β , la matrice de u est de la forme :

$$[u]_\beta = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_n & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ (0) & & & & * & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & (*) & & * \end{array} \right)$$

I.3. Le polynôme caractéristique.

Rappels. Soit u un endomorphisme de E de dimension finie. Alors les déterminants des matrices associées à u sont identiques dans toutes les bases de E . Ce déterminant commun est appelé le déterminant de u et est noté $\det(u)$. Ainsi, pour toute base β de E , on a :

$$\det(u) = \det([u]_\beta)$$

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de DF et u un endomorphisme de E . Le polynôme caractéristique de u est le polynôme :

$$\chi_u(x) = \det(xId - u)$$

Par extension, le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Propriétés.^[4] Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n finie.

1. χ_u est un polynôme de degré n .
2. Les racines de χ_u sur $\mathbb{K}$ sont exactement les vp de u sur $\mathbb{K}$.
3. Sur les coefficients de χ_u : le polynôme caractéristique est de la forme :

$$X^n - \text{tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$$

Ainsi le coefficient dominant vaut 1 (le polynôme caractéristique est donc unitaire), le coefficient sous-dominant (c'est-à-dire le coefficient de X^{n-1}) vaut $-\text{tr}(u)$ et le coefficient constant vaut $(-1)^n \det(u)$,

4. Si A et B sont semblables alors $\chi_A = \chi_B$. Ainsi le polynôme caractéristique est un invariant de similitude.
5. Si A est une matrice triangulaire (ou diagonale) alors les valeurs propres de A sont les éléments diagonaux.

Exemple. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ alors :

$$\chi_A = X^2 - \text{tr}(A).X + \det(A)I_2$$

I.4. Multiplicités des valeurs propres.

Définition. En dimension finie, l'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique. On la notera $\text{mult}(\lambda)$.

Proposition.^[5] Dans $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique est scindé. Ainsi u a exactement $n = \dim(E)$ valeurs propres comptées avec leur multiplicité. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ces valeurs propres, on a alors :

$$\begin{cases} \det(u) &= \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n \\ \text{tr}(u) &= \lambda_1 + \dots + \lambda_n \end{cases}$$

Si les valeurs propres ne sont pas écrites autant de fois que leur multiplicité, il faut en tenir compte. Ainsi si $\mu_1, \dots, \mu_p$ sont les valeurs propres distinctes de u , on a :

$$\begin{cases} \det(u) &= \mu_1^{\text{mult}(\mu_1)} \times \dots \times \mu_p^{\text{mult}(\mu_p)} \\ \text{tr}(u) &= \text{mult}(\mu_1)\mu_1 + \dots + \text{mult}(\mu_p)\mu_p \end{cases}$$

Exercice.^[6] Soit A une matrice à coefficients réels. :

1. Montrer que λ valeur propre de A d'ordre p ssi $\bar{\lambda}$ valeur propre de A d'ordre p .
2. Montrer que si $E_\lambda = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ alors $E_{\bar{\lambda}} = \text{Vect}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_p)$.
3. En déduire que les espaces propres E_λ et $E_{\bar{\lambda}}$ sont de même dimension.

I.5. Exemples de calculs de polynômes caractéristiques.

Exercice.^[7] Déterminer le polynôme caractéristique et les espaces propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 8 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice.^[8] Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si A ou B est inversible alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. On verra en TD que l'hypothèse " A ou B inversible" n'est pas nécessaire.

Exercice - Matrice compagnon.^[9] Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que le polynôme caractéristique associé à la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_{n-2} \\ -a_{n-1} \end{matrix} \\ \hline I_{n-1} & \end{array} \right)$$

est le polynôme P . Cette matrice est la matrice compagnon de P .

I.6. Polynôme caractéristique et sev stables.

Rappels.

1. Soit F est un sev de E de DF stable par un endomorphisme u de E . Alors $u|_F^F$ encore noté u_F est l'endomorphisme induit par u sur F . De plus, en notant β une base obtenue en complétant une base β' de F , la matrice $[u]_\beta$ est de la forme :

$$[u]_\beta = \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} [u_F]_{\beta'} & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right)$$

2. De plus le déterminant d'une matrice de cette forme vaut $\det(A) \times \det(B)$.

Propriété.^[10] Soit F est un sev de E de DF stable par un endomorphisme u de E . Alors, le polynôme χ_{u_F} divise le polynôme χ_u .

Conséquence.^[11] Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -ev de DF, et λ une valeur propre de u , alors :

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq \text{mult}(\lambda)$$

II. Première condition de diagonalisation.

II.1. Diagonalisation, trigonalisation.

Définitions. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -ev E de DF et A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. u est diagonalisable (resp. trigonalisable) si et seulement s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale (resp. triangulaire supérieure).
2. A est diagonalisable (resp. trigonalisable) si et seulement si A est semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure).

Remarque. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -ev E de DF et A la matrice de u dans une base quelconque, alors :

$$u \text{ diagonalisable} \iff A \text{ diagonalisable} \quad \text{et} \quad u \text{ trigonalisable} \iff A \text{ trigonalisable}$$

Propriétés.^[12]

1. Considérons un endomorphisme u diagonalisable ou trigonalisable et A la matrice diagonale ou triangulaire associée à u dans une base adaptée. Alors sur la diagonale de A se trouvent les valeurs propres de u répétées autant de fois que leur multiplicité.
2. Le résultat est encore vrai pour les matrices diagonalisables ou trigonalisables.

Exercice.^[13] On admet que $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Déterminer toutes les matrices diagonales semblables à A .

Exercice.^[14] Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\begin{cases} A \text{ diagonalisable sur } \mathbb{K} \\ A \text{ a une unique valeur propre sur } \mathbb{K} \end{cases} \iff A \text{ est une homothétie}$$

II.2. Intérêt d'une base de vecteurs propres.

Théorème.^[15] Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de DF, on a alors :

$$u \text{ diagonalisable} \iff \text{Il existe une base } \beta \text{ de } E \text{ formée de vecteurs propres}$$

Si u est diagonalisable, on a alors $[u]_{\beta}$ diagonale

Exercice.^[16] Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = (X-1)P'$.

1. Déterminer $f((X-1)^p)$ pour tout p de $\{0, \dots, n\}$.
2. En déduire que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

II.3. Première Condition de diagonalisation.

Théorème.^[17] Soit u un endomorphisme de E de DF et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp de u sur $\mathbb{K}$. Les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :

- $$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \bullet \quad u \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{K}. \\ \bullet \quad E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p} \\ \bullet \quad \dim(E) = \dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2}) + \dots + \dim(E_{\lambda_p}) \\ \bullet \quad \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \text{ et pour tout } i \text{ de } \{1, \dots, p\}, \dim(E_{\lambda_i}) = \text{mult}(\lambda_i) \end{array}$$

On a encore un résultat semblable sur les matrices diagonalisables.

Conséquences.^[18] Soit u un endomorphisme de E de dimension n .

1. Si χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable (sans réciproque).
2. Si u a $n = \dim(E)$ vp distinctes alors u est diagonalisable (sans réciproque).
3. Si χ_u n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$ alors u n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$ (sans réciproque).

Remarques.

1. Le théorème précédent et ses conséquences sont encore vrais pour les matrices. Il faut alors remplacer $\dim(E)$ par le nombre de colonnes de la matrice.
2. Il existe des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ et pas sur $\mathbb{R}$. Par exemple, la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car son polynôme caractéristique $(X - i)(X + i)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, tandis qu'elle n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique $X^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Méthode.^[19] Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Comment savoir si A est diagonalisable ?
- Comment écrire $A = PDP^{-1}$, avec D une matrice diagonale ?
- Comment trouver la puissance d'une matrice diagonalisable ?

- 1) On recherche les valeurs propres de A , souvent en recherchant les racines du polynôme caractéristique.
- 2) Pour chaque valeur propre λ , on cherche une base de E_λ .
- 3) On conclue sur la diagonalisabilité :
 - Si on connaît le polynôme caractéristique : A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé et $\dim(E_{\lambda_i}) = \text{mult}(\lambda_i)$ pour tout i de $\{1, \dots, p\}$.
 - Si on ne connaît pas le polynôme caractéristique : A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des espaces propres fait n .
- 4) Sur la diagonale de la matrice D apparaissent les vp de A répétées autant de fois que leur multiplicité. Ensuite on recolle (dans le même ordre que les valeurs propres) les bases des espaces propres trouvées précédemment pour en faire une base de $\mathbb{R}^n$. La matrice P est alors la matrice associée à cette base. On a alors $A = PDP^{-1}$.
- 5) Enfin $A^n = (PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \dots (P^{-1}P)DP^{-1} = PD^n P^{-1}$

II.4. Exercices

Exercice - application à la puissance d'une matrice.^[20] Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une base de vecteurs propres puis déterminer la matrice de changement de base P pour avoir $P^{-1}AP$ diagonale
3. Déterminer A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice - application aux suites récurrentes.^[21] Considérons la suite récurrente (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = u_2 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$

1. Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Déterminer A telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser A .
3. En déduire u_n en fonction de n .

Exercice - application aux suites imbriquées.^[22] Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} &= u_n &+ v_n \\ v_{n+1} &= -2u_n &+ 4v_n \end{cases}$$

Exprimer u_n et v_n en fonction de n .

III. Polynômes annulateurs et deuxième condition de diagonalisation.

III.1. Polynômes d'endomorphismes, de matrices.

Définitions. Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$

1. Si u endomorphisme d'un espace vectoriel E alors on définit l'endomorphisme $P(u)$ par :

$$P(u) = a_0Id + a_1u + \dots + a_nu^n$$

2. Si A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors on définit :

$$P(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_nA^n$$

Remarques.

1. On notera que le coefficient a_0 devient a_0Id ou a_0I_n .
2. Si x est un vecteur de E alors $P(u)(x)$ a un sens mais $P(u(x))$ n'est pas !

Propriétés. ^[23] Soit u une endomorphisme de E .

1. Si $u(x) = \lambda.x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda).x$. Ainsi si λ est valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.
2. Si Q_1 et Q_2 sont dans $\mathbb{K}[X]$ alors : $(Q_1Q_2)(u) = Q_1(u) \circ Q_2(u) = Q_2(u) \circ Q_1(u)$
3. Changement de base. Pour tout automorphisme v de $\mathcal{L}(E)$ et tout polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ on a :

$$Q(v^{-1} \circ u \circ v) = v^{-1} \circ Q(u) \circ v$$

Idem sur les polynômes de matrices.

Exercice. ^[24] Soit u un endomorphisme de E de dimension finie et P dans $\mathbb{K}[X]$. Le but de l'exercice est de montrer que :

$$\text{Sp}(P(u)) = \{P(\lambda) / \lambda \in \text{Sp}(u)\}$$

1. Montrer que si x est vecteur propre de u associé à la valeur propre λ alors x est aussi vecteur propre de $P(u)$ associée à la valeur propre $P(\lambda)$. Quelle inclusion a-t-on montrée ?
2. Soit μ une valeur propre de $P(u)$. En factorisant $P - \mu$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer en utilisant le déterminant, qu'au moins une des racines de $P - \mu$ est valeur propre de u . En déduire l'autre inclusion.

III.2. Rappels sur les polynômes annulateurs.

Définition. Soit P polynôme de $\mathbb{K}[X]$, u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et A une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} P \text{ est annulateur de } u &\iff P(u) = 0 \\ P \text{ est annulateur de } A &\iff P(A) = 0 \end{aligned}$$

Exemples. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E .

1. $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de u si et seulement si u est un projecteur/une projection.
2. $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de u si et seulement si u est une involution linéaire/une symétrie.

Propriétés.^[25] Soit u un endomorphisme de E de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et P est un polynôme annulateur de u

1. Pour tout polynôme Q , PQ est encore un polynôme annulateur.
2. Toute valeur propre de u est racine de P (sans réciproque), c'est-à-dire :

$$\boxed{Sp(u) \subset Rac(P)}$$

3. Ainsi $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ divise P .

Idem sur les polynômes de matrices.

III.3. Cayley-Hamilton.

Théorème - Cayley-Hamilton.^[26] Soit u un endomorphisme de E de DF. Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u c'est-à-dire $\chi_u(u) = 0$. On a bien sûr un résultat similaire sur les matrices.

Exercice.^[27] Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que :

$$A \text{ nilpotente} \iff \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$$

Que penser de ce résultat si on considère le spectre sur $\mathbb{R}$?

2. Montrer que l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente de taille n ne peut dépasser n .

Exercice.^[28] Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{tr}(A^k) = 0$ pour tout k de $\{1, \dots, n\}$.

1. Montrer en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton que $\det(A) = 0$.
2. En déduire que A est semblable à une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

où B est dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

3. Montrer par récurrence sur n que A est nilpotente.

III.4. Deuxième condition de diagonalisation.

Définition. Soit u un endomorphisme de E de DF. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les vp distinctes de u . Alors :

$$P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$$

est le polynôme spectral de u . On a une définition similaire pour les matrices.

Remarques.

1. Attention, il s'agit d'une définition locale. Il faut donc impérativement le redéfinir à chaque fois que vous l'utilisez ! On en a besoin uniquement car le polynôme minimal n'est pas au programme.
2. Le polynôme spectral est donc le polynôme caractéristique sans les puissances.
3. On a déjà vu dans le III.1. que le polynôme spectral divise tout polynôme annulateur.

Théorème.^[29] Soit u un endomorphisme de E de DF :

- $$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \bullet \quad u \text{ diagonalisable.} \\ \bullet \quad \text{le polynôme spectral de } u \text{ est un polynôme annulateur de } u. \\ \bullet \quad \text{Il existe un polynôme annulateur de } u \text{ scindé à racines simples.} \end{array}$$

Résultat encore vrai pour les matrices.

Consequences.^[30] Soit u un endomorphisme de E de DF alors :

1. Soit $P = (X - \mu_1)^{\alpha_1} \dots (X - \mu_q)^{\alpha_q}$ un polynôme annulateur d'un endomorphisme u (par exemple le polynôme caractéristique) alors :

- $$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \bullet \quad u \text{ diagonalisable} \\ \bullet \quad \text{Le polynôme } (X - \mu_1) \dots (X - \mu_q) \text{ est un polynôme annulateur de } u \end{array}$$

2. La restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sev stable est encore diagonalisable.
3. Si u est diagonalisable alors les polynômes annulateurs de u sont exactement les multiples du polynôme spectral.

Exemples.

1. Les symétries sont diagonalisables car $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples.
2. Les projections sont diagonalisables car $X^2 - X$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples.
3. Les matrices nilpotentes non nulles ne sont pas diagonalisables car le polynôme spectral X n'est pas annulateur.

III.5. Applications.

Exercice.^[31] Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 9 \\ -3 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Calculer A^2 . En déduire que A est diagonalisable.

Exercice.^[32] Montrer sans calculer le polynôme caractéristique que les matrices

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Déterminer les valeurs propres.

Exercice.^[33] Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que A^2 soit diagonalisable.

1. Montrer que A n'est pas forcément diagonalisable.
2. Montrer que si 0 n'est pas valeur propre, alors A est diagonalisable.

III.6. Intérêt des endomorphismes qui commutent.

Théorème.^[34] Si u et v sont des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E qui **commutent**, alors u laisse stable le noyau, l'image et les espaces propres de v .

Définitions.

1. Soient u et v des endomorphismes d'un espace vectoriel E . On dit que u et v sont simultanément diagonalisables s'il existe une base dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales.
2. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont simultanément diagonalisables s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.

Exercice.^[35] Soient u, v des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie vérifiant :

$$\begin{cases} u \text{ et } v \text{ commutent.} \\ u \text{ et } v \text{ sont diagonalisables.} \end{cases}$$

1. Soit F un sous espace propre de v . Expliquez pourquoi l'endomorphisme induit u_F existe et est diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe une base de F formée de vecteurs qui sont propres pour u et pour v .
3. En déduire que u et v sont simultanément diagonalisables.
4. Montrer réciproquement que si u, v sont simultanément diagonalisables alors u et v commutent.

Outil important.^[36] Soit D une matrice diagonale de taille $n \times n$ avec les coefficients diagonaux tous différents. Montrer que pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M \text{ commute avec } D \iff M \text{ est diagonale}$$

1. Directement en comparant MD et DM .
2. En montrant que les vecteurs propres de D sont des vecteurs propres de M .

Méthode. Comment résoudre $Q(M) = A$?^[37] Comment résoudre une équation matricielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'inconnue M du type :

$$Q(M) = A$$

avec P un polynôme et A une matrice ayant n valeurs propres distinctes ?

1. On vérifie que A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes. On en conclue que A est diagonalisable. On pose $A = PDP^{-1}$
2. En multipliant par P adroite et P^{-1} à gauche de l'équation $Q(M) = A$, on se ramène à une équation du type :

$$Q(N) = D$$

3. On vérifie que D et N commutent et on redémontre l'outil. On conclue que N est diagonale.
4. On identifie coefficients à coefficients les matrices $Q(N)$ et D . On conclue.

Exercice.^[38] Notons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Soit M dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^5 - M^3 + M = A$. Montrer que M et A commutent.
3. En déduire les valeurs de M possibles.

III.7. Trigonalisation.

Théorème.^[39] Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de DF et u un endomorphisme de E .

$$u \text{ trigonalisable sur } \mathbb{K} \iff \chi_u \text{ scindé sur } \mathbb{K}$$

Remarque. La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication (programme officiel).

Exercice.^[40] Montrer qu'une matrice triangulaire inférieure est trigonalisable.

Exercice.^[41] Considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A .
2. Déterminer les sev propres de A . A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer C_2 tels que $AC_2 = C_1 + C_2$
4. Déterminer C_3 tels que $AC_3 = C_2 + C_3$
5. Déterminer T triangulaire supérieur et P inversible pour que $A = PTP^{-1}$.

Exercice.^[42] Soit A une matrice carrée et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A . Supposons de plus que $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_{p-1}| < |\lambda_p|$. Notons pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\text{tr}(A^{n+1})}{\text{tr}(A^n)}$$

1. Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda_p$
2. Écrire un programme en Python permettant de trouver la vp de plus grand module d'une matrice.