# Séries numériques.

PSI

**Chapitre 3**

## I. Notion de séries et séries de références.

### I.1. Définition.

**Définitions.** Soit $(a_n)$ une suite de $\mathbb{K}$.

1. La série de terme général $(a_n)$ est la suite $(S_n)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

   On dit également que $(S_n)$ est la suite des sommes partielles de $(a_n)$.

2. Quelques façons de désigner la série :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \quad \text{ou} \quad \sum a_k \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq 0} a_k$$

3. Si la série converge, on note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ sa limite.

**Remarques.**

1. Attention $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ désigne le n$^{\text{ième}}$ terme de la série et pas la série elle même.
2. Pour tout $p$ de $\mathbb{N}$, les séries $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right)$ et $\left(\sum\limits_{k=p}^{n} a_k\right)$ sont de même nature cad les 2 sont convergentes ou les 2 sont divergentes. Elles se notent toutes les deux : $\sum a_k$. Si on cherche la limite, il faut alors préciser la première valeur de $k$. Sans autre précision, le premier terme est la première valeur qui a un sens.

### I.2. Dérivation discrète (HP).

**Définition.** L'application $\Delta$ de $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$ définie par :

$$\Delta(u)_n = \begin{cases} u_n - u_{n-1} & \text{si } n \neq 0 \\ u_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est appelée dérivée discrète.

**Remarques.**

1. $\Delta$ est une application linéaire.
2. $\Delta\left(\sum a_n\right) = (a_n)$. Ainsi $\sum a_n$ est en quelque sorte une primitive discrète de la suite $(a_n)$.

**Analogie.**

| Continue | Discret |
|---|---|
| $f$ | $(u_n)$ |
| $f'$ | $\Delta(u)$ |
| $f(x)$ | $u_n$ |
| $\int_a^x f$ | $\sum u_n$ |

## I.3. Divergence grossière.

**Propriétés.**[1]

1. Si la série $\sum a_n$ est convergente alors $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Attention pas de réciproque !
2. Par contraposée, on a donc que si $(u_n)$ ne tend pas vers 0 alors la série est divergente.

**Exemple.** $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

## I.4. Opérations sur les séries.

**Propriétés.**[2]

1. La somme de séries convergentes est convergente.
2. La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente.
3. La multiplication d'une série convergente par un scalaire est une série convergente.
4. La multiplication d'une série divergente par un scalaire non nul est une série divergente.

**Remarques.**

1. Aucune information sur la somme de 2 séries divergentes !
2. Quand on écrit :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$
Il faut vérifier que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes.
3. En pratique pour déterminer la nature d'une série, on peut casser la série et étudier la convergence des morceaux. Si au plus un des morceaux est divergent, on peut conclure. Voir l'éclatement plus loin.

### I.5. Reste d'une série convergente.

**Définition.** Si $S = \sum a_n$ est une série convergente, alors le reste de cette série est la suite $(R_n)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n \;=\; \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

**Remarques.**

1. La suite $(S_n + R_n)$ est constante égale à la limite de la série.
2. $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
3. $(R_n)$ peut servir à estimer la rapidité de convergence de la série ou encore l'erreur commise si on approche la limite de la série par $S_n$.

**Exercice.**[3]

1. Montrer que pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \;\leq\; \frac{1}{k^2} \;\leq\; \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

2. En déduire que la série $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente et déterminer un équivalent du reste.

### I.6. Séries de références.

**Théorème - les 3 séries de référence.**[4]

1. **Riemann.** La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2. **Géométrique.** La série $\sum q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. En cas de convergence, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k \;=\; \frac{1}{1-q} \qquad\qquad R_n \;=\; \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^k \;=\; \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

3. **Exponentielle.** La série $\sum \frac{a^n}{n!}$ est convergente pour toute valeur de $a$ et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} \;=\; e^a$$

**Exercice.**[5] Soit $x$ un réel tel que $|x| < 1$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} x^n \cos(nx)$ est convergente et déterminer sa limite.

# II. Séries à termes positifs.

## II.1. Intérêt.

**Définition.** Une série $\sum a_n$ est à termes positifs (STP) si et seulement si tous les $a_n$ sont dans $\mathbb{R}^+$. Si ce n'est pas le cas, on dira que la série est à termes quelconques (STQ).

**Remarque.** L'intérêt principal des STP réside dans :

$$\sum a_n \ \text{STP} \iff \sum a_n \ \text{croissante}$$

Ainsi en utilisant le théorème des limites monotones, on obtient :

1. Les STP majorées sont convergentes.
2. les STP non majorées tendent vers $+\infty$.

## II.2. Théorème de comparaison.

**Théorème de comparaison.**[6] Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries à termes positifs vérifiant l'une des quatre propriétés suivantes APCR :

$$a_n \leq b_n \qquad \text{ou} \qquad a_n = o(b_n) \qquad \text{ou} \qquad a_n = O(b_n) \qquad \text{ou} \qquad a_n \sim b_n$$

Alors :

1. Si $\sum b_n$ convergente alors $\sum a_n$ convergente.
2. Si $\sum a_n$ divergente alors $\sum b_n$ divergente.

**Remarque.** Bien sûr, comme pour les intégrales, aucun résultat si $\sum a_n$ convergente ou si $\sum b_n$ divergente.

**Exercice.**[7] Déterminer la nature de $\sum \frac{ln(n)}{n}$ et $\sum \frac{\sin^2(n)}{n^2}$ .

## II.3. Conséquences sur les suites équivalentes.

**Conséquences.**[8] Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des STP.

$$a_n \sim b_n \qquad \Longrightarrow \qquad \sum a_n \ \text{et} \ \sum b_n \ \text{sont de même nature}$$

**Exercice.**[9] Déterminer la nature de $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ .

### II.4. Comparaison série-intégrales.

**Théorème.** [10] Soit $f$ une application continue par morceaux sur $[n_0;+\infty[$ et décroissante, on a alors :

$$\left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad \int_{n_0}^{+\infty} f$$

sont de même nature.

**Remarque.** Le résultat en lui même est intéressant mais l'inégalité contenue dans la preuve (qu'il faut savoir retrouver !) est parfois plus utile :

$$-f(n_0) + \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \quad \leq \quad \int_{n_0}^{n} f \quad \leq \quad -f(n) + \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

**Exercice.** [11]

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$
2. Soit $\alpha$ dans $]0;1[$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}$
3. Soit $\alpha$ dans $]1;+\infty[$, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

**Exercice.** [12] Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$ est divergente, puis déterminer un équivalent de la somme partielle en $+\infty$.

---

## III. Séries à termes quelconques.

### III.1. Convergence absolue.

**Définition.** Soit $(a_n)$ une suite de $\mathbb{K}$. La série $\sum a_n$ est absolument convergente (AC) si et seulement si la série à termes positifs $\sum |a_n|$ est convergente.

**Théorème.** [13] Toute série AC est convergente.

**Définition.** Une série qui converge, mais qui ne converge pas absolument, est appelée une série semi-convergente.

**Exemple.** La série $\sum \frac{(-1)^{Ent(\sqrt{n})}}{n^2}$ est convergente, car :

$$\sum \left| \frac{(-1)^{Ent(\sqrt{n})}}{n^2} \right| = \sum \frac{1}{n^2}$$

est covergente.

## III.2. Séries alternées.

**Définition.** Une série alternée est une série de la forme $\sum (-1)^n a_n$ ou $\sum (-1)^{n+1} a_n$ avec $(a_n)$ une suite de $\mathbb{R}$ décroissante et tendant vers 0.

**Théorème.**[14]

1. Toute série alternée est convergente.
2. Le reste d'une série alternée est majoré en valeur absolue par son premier terme en valeur absolue. En d'autres termes, si $L$ est la limite de la série alternée :

$$\left| L - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

**Exemple.** Les séries suivantes sont alternées et donc convergentes : $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ .

## III.3. Règle de D'Alembert.

**Théorème.**[15] Soit $\sum a_n$ une série avec $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \in \bar{\mathbb{R}}^+$.

1. Si $l < 1$ alors $\sum a_n$ est absolument convergente.
2. Si $l > 1$ alors $\sum a_n$ est grossièrement divergente.
3. Aucune conclusion possible pour $l = 1$

**Exercice.**[16] Déterminer la nature de $\sum \frac{n!}{n^n}$ et $\sum \frac{n}{2^n}$.

## III.4. Règle du $n^\alpha$.

**Théorème.**[17] Soit $\sum a_n$ une STQ. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha |a_n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $\sum a_n$ est absolument convergente.

**Remarque.** Comme pour les intégrales, ce théorème n'est pas au programme. Il faut donc le redémontrer systématiquement :

$$n^{\alpha}|a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| = o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

Ainsi, d'après le théorème de comparaison et comme $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ est convergente, on a $\sum |a_n|$ convergente.

**Exercice.** [18] Déterminer la nature de $\displaystyle\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^2}\right)$

## III.5. Une technique classique : l'éclatement.

**Méthode.** Pour déterminer la convergence d'une série, une technique consiste classique consiste à casser le terme général en morceaux de la forme $\frac{1}{n^{\alpha}}$ et d'étudier la convergence des morceaux. Cet éclatement se fait en général à l'aide des DL.

1. Si tous les morceaux convergent, la série est convergente.
2. Si un unique morceau est divergent, la série est divergente.
3. Si plus d'un morceau est divergent, on ne peut pas conclure.

**Exercice.** [19] Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$ est divergente.

---

# IV. Études de séries, applications.

## IV.1. Résumé des théorèmes.

**Résumé.** Après avoir vérifié que la série n'est pas grossièrement divergente, voilà les principaux théorèmes permettant de conclure à la convergence ou la non convergence d'une série :

| Séries de référence | STP | STQ |
|---|---|---|
| 1. Séries de Riemann | 1. Th. de comparaison | 1. Conv. absolue |
| 2. Séries géométriques | 2. Comparaison série-intégrale | 2. Th des séries alternées |
| 3. Séries exponentielles | | 3. Règle du $n^\alpha$ |

## IV.2. La somme d'une série : somme télescopique et série géométrique.

**Méthode.** Lorsqu'on demande la somme d'une série, il existe 2 méthodes principales :

1. La somme télescopique.
2. La série géométrique.

Voici quelques exemples classiques :

**Exercice.**[20] Étudier la nature des séries suivantes. Dans le cas où la série est convergente, déterminer sa limite :

1) $\sum x^n \cos(n\theta)$ 2) $\sum \frac{1}{k^2 - 1}$

3) $\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ 4) $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

**Exercice.**[21] Soient $p$ dans $\mathbb{N}^*$ et :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p)}$$

1. Montrer que $\sum u_n$ est convergente.
2. Déterminer $\alpha$ et $\beta$ tels que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ :

$$u_n = \frac{\alpha}{n(n+1)(n+2)\dots(n+p-1)} + \frac{\beta}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}$$

3. En déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

## IV.3. Formule de Stirling

**Formule de Stirling.**[22]

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

**Exercice.**[23] Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1 + \tfrac{1}{k}\right)$$

1. Montrer que $(S_n)$ est convergente, puis que pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ :

$$S_{2n} = \ln\left(\frac{(2n+1)(2n)!^2}{2^{4n} n!^4}\right)$$

2. En déduire que $(S_n)$ converge vers $\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

## IV.4. Quand on passe par une série pour connaitre la limite d'une suite.

**Remarque - très très utile.** Soit $(a_n)$ une suite de $\mathbb{K}$. Alors, par télescopage, on a :

$$(a_n) \text{ converge} \iff \sum (a_{n+1} - a_n) \text{ converge}$$

Ainsi parfois pour montrer qu'une suite converge $(a_n)$ converge, on montre que la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge.

**Exercice - la constante d'Euler.**[24] Notons $u_n = ln(n) - H_n$ avec $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{2n^2}$
2. En déduire que $(u_n)$ est convergente. Cette limite $\gamma$ est appelée la constante d'Euler ($\gamma \simeq 0.57$).

**Exercice - preuve de la formule de Stirling.**[25] On rappelle quelques informations sur l'intégrale de Wallis :

$$I_{2n} \quad = \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)dx \quad = \quad \frac{\pi}{2}.\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \quad \sim \quad \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

De plus, posons :

$$u_n = \ln\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n - u_{n+1}$$

1. Montrer que $v_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$
2. En déduire que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$.
3. Montrer que $(u_n)$ est convergente.
4. Posons pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $w_n = e^{u_n}$. Montrer que
$$\frac{\sqrt{2}w_{2n}}{w_n^2} \quad = \quad \sqrt{n}\frac{2}{\pi}I_{2n}$$
5. En déduire la formule de Stirling :
$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

## IV.5. Produit de Cauchy.

**Remarques.** Le produit de Cauchy de deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est la série $\sum c_n$ avec :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

**Remarques.**

1. Le produit de Cauchy est le prolongement du produit sur les polynômes.
2. Si la convergence n'est pas absolue, on peut avoir $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergentes et le produit divergent. Par un exemple, voir l'exercice 2

**Exercice 1.**[26] Montrer que le produit de deux séries exponentielles $\sum \frac{a^n}{n!}$ et $\sum \frac{b^n}{n!}$ est la série exponentielle $\sum \frac{(a+b)^n}{n!}$.

**Théorème.**[27] Le produit de Cauchy de 2 séries AC est AC. De plus, dans ce cas, la limite du produit de Cauchy est le produit des limites cad avec les notations de la définition :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \quad = \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \times \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

**Exercice 2.**[28] Considérons la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

1. Montrer que la série converge.
2. Montrer que pour tout $k$ dans $\{1,\dots,n\}$, on a : $\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geq \frac{1}{n}$
3. En déduire que le produit de Cauchy de la série avec elle-même est divergent.