Rappels et compléments d'algèbre linéaire.

PSI

Chapitre 2

I. Rappels sur les polynômes

I.1. Degré et valuation

Définition - degré et de la valuation. Soit $P = (a_n)$ dans $\mathbb{K}[X]$.

1. Si P est non nul, on définit :

$$\deg(P) = Max\,\{n \in \mathbb{N}\,/\,a_n \neq 0\} \qquad\qquad \mathrm{val}(P) = Min\,\{n \in \mathbb{N}\,/\,a_n \neq 0\}$$

2. $\deg(0) = -\infty$ et $\mathrm{val}(0) = +\infty$.

Théorème.[1] Soit P et Q deux polynômes, on a alors :

1. $\deg(P+Q) \leq \mathrm{Max}(\deg(P), \deg(Q))$. Il y a égalité par exemple si $\deg(P) \neq \deg(Q)$.
2. $\mathrm{val}(P+Q) \geq \mathrm{Min}(\mathrm{val}(P), \mathrm{val}(Q))$. Il y a égalité par exemple si $\mathrm{val}(P) \neq \mathrm{val}(Q)$.
3. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
4. $\mathrm{val}(P \times Q) = \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.

Critéres de liberté.[2] Une famille de polynômes est dite échelonnée en degré (resp. en valuation) si et seulement les degrés (resp. les valuations) des polynômes sont différents.

1. Montrer que toute famille échelonnée en degré de polynômes non nuls est libre.
2. Montrer que toute famille échelonnée en valuation de polynômes non nuls est libre.

Exercice.[3] Soit n dans $\mathbb{N}$. Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, on pose :

$$P_k = (X+1)^k \qquad\qquad Q_k = X^k(1-X)^{n-k}$$

1. Montrer que les familles $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ et $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ sont des bases de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, déterminer les coordonnées de X^k dans ces bases.

I.2. Racines et degré. Comment montrer qu'un polynôme est nul ?

Théorème.[4]

1. Un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ a au plus $\deg(P)$ racines dans $\mathbb{K}$ comptées avec leur multiplicité.
2. Un polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ qui admet au moins $(n+1)$ racines distinctes dans $\mathbb{K}$ est nul.
3. Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ qui admet une infinité de racines dans $\mathbb{K}$ est nul.

Méthodes.[5] Soit P et Q dans $\mathbb{K}[X]$

1. Pour montrer qu'un polynôme P est nul, on montre que P a plus de racines que son degré si on connait $deg(P)$, sinon on montre qu'il a une infinité de racines.
2. Pour montrer que 2 polynômes sont égaux, on montre que leur différence est nulle avec la méthode précédente.

Exercice.[6] Soient a_0, ..., a_n des réels distincts. Montrer que l'application ϕ définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\phi(P) = \sum_{k=0}^{n} |P(a_k)|$$

est une norme.

I.3. Polynômes irréductibles.

Outil important.[7] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si z est une racine d'ordre r de P, il en est de même pour $\bar{z}$.

Théorème fondamental de l'algèbre (D'Alembert-Gauss).[8] Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ a au moins une racine. On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Conséquences.[9]

1. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
2. Tout polynôme est scindable sur $\mathbb{C}$ et admet donc exactement autant de racines comptées avec leur multiplicité que son degré.
3. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 ayant un Δ strictement négatif.

Méthode. Comment écrire un polynôme en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$? [10]

1. On cherche les racines sur $\mathbb{C}$, on en déduit une décomposition dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On regroupe les racines conjuguées pour faire un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice.[11] Décomposer $X^4 + 1$, en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

I.4. Polynômes de matrices, d'endomorphismes

Définitions. Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots a_n X^n$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$

1. Si u endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors on définit l'endomorphisme $P(u)$ par :
$$P(u) \quad = \quad a_0 Id \, + \, a_1 u \, + \, \dots \, + \, a_n u^n$$
2. Si A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors on définit :
$$P(A) \quad = \quad a_0 I_n \, + \, a_1 A \, + \, \dots \, + \, a_n A^n$$
3. Le polynôme est dit annulateur de u (resp. de A) si $P(u) = 0$ (resp $P(A) = 0$).

Remarques.

1. Pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $u^k = u \, o \, \dots \, o \, u$ et $A^k = A \times A \times \dots \times A$.
2. On notera que le coefficient a_0 devient $a_0 Id$ ou $a_0 I_n$.
3. Si x est un vecteur de E alors $P(u)(x)$ a un sens mais $P(u(x))$ n'en a pas !

Exemples. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel E.

1. $X^2 - X$ est un polynôme annulateur de u si et seulement si u est un projecteur/une projection.
2. $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de u si et seulement si u est une involution linéaire/une symétrie.

Propriétés.[12] Soient u et v des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et P, Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On a :

1. $(PQ)(u) = P(u) \, o \, Q(u) = Q(u) \, o \, P(u)$
2. Deux polynômes d'un même endomorphisme commutent.
3. Si v est bijectif alors : $P\left(v^{-1} o \, u \, o \, v\right) \quad = \quad v^{-1} o \; P(u) \, o \, v$
4. Si P est un polynôme annulateur de u, alors PQ est encore un polynôme annulateur de u.

On a des résultats similaires sur les polynômes de matrices, mais les o sont remplacés par $\times$.

Méthode : calcul des puissances et de l'inverse d'un endo/d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur.[13] Soit P un polynôme annulateur d'un endomorphisme u de dimension finie.

1. Pour calculer u^n, on calcule le reste R de la division euclidienne de X^n par P. On a alors $u^n = R(u)$
2. Si le coefficient constant a_0 de P est non nul alors u est inversible et : $u^{-1} = \frac{P - a_0}{-a_0 X}(u)$.

Exercice.[14] Soit :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 3A$
2. En déduire A^{-1} et A^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.5. Polynômes de Lagrange.

Théorème - Les polynômes de Lagrange.[15] Soient n dans $\mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{K}$ distincts.

1. Pour tout i dans $\{0, \ldots, n\}$, il existe un unique polynôme L_i de $\mathbb{K}_n[X]$ vérifiant $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ pour tout j de $\{0, \ldots, n\}$. Ce polynôme vaut :
$$L_i \;=\; \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$
2. La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
3. Les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont :
$$(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n))$$
En d'autres termes, on a :
$$P \;=\; P(a_0)L_0 \;+\; P(a_1)L_1 \;+\; \ldots \;+\; P(a_n)L_n$$
4. En particulier, on a : $L_0 + L_1 + \ldots + L_n \;=\; 1$

Remarque. On peut se servir des polynômes de Lagrange pour approcher une fonction f. Dans ce cas, on choisit a_0, ..., a_n, puis on approche f par le polynôme de Lagrange vérifiant $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout i de $\{0, \ldots, n\}$.

Exercice.[16] Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont tous différents. On définit de plus le commutant d'une matrice M par :
$$C_M \;=\; \left\{ N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \,/\, MN = NM \right\}$$
On note également pour tout matrice carrée M à coefficients dans $\mathbb{K}$:
$$\mathbb{K}[M] \;=\; \left\{ P(M) \,/\, P \in \mathbb{K}[X] \right\}$$

1. Montrer que C_M est une $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Montrer que toute matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme en D.
3. En déduire que :
$$C_D \;=\; D_n(\mathbb{K}) \;=\; \mathbb{K}[D]$$
4. En déduire que : $C_A \;=\; \mathbb{K}[A]$.

I.6. Polynômes de Tchebytchev.

Exercice - Polynômes de Tchebytchev.[17] On définit la suite des polynômes de Tchebychev (T_n) par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}' \; T_{n+1} \;=\; 2XT_n - T_{n-1}$$

1. Montrer que :
$$\forall n\mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ cos(n\theta) = T_n(cos\theta) \qquad (*)$$
2. Montrer que T_n est le seul polynôme vérifiant la relation $(*)$.
3. Calculer T_5 avec la relation de récurrence, puis avec la relation $(*)$.
4. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme T_n est de degré n,
5. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, le polynôme T_n scindé et à racines simples.
6. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} si $n \geq 1$. En déduire la forme factorisée de T_n.

Exercice.[18] Calculer le déterminant :

$$\Delta_n(X) \;=\; \begin{vmatrix} X & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2X & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2X & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2X \end{vmatrix}$$

Exercice.[19] Calculer $T_n(ch(x))$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.7. Relations coefficients-racines, racine n$^{\text{ème}}$.

Théorème.[20] Soit $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines complexes de P comptées avec leur multiplicité. Alors :

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_n \;=\; -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad\qquad \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_n \;=\; (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Théorème - Racines n$^{\text{ème}}$ de 1.[21]

1. Les racines n$^{\text{ème}}$ de 1 sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec k variant dans une liste de n entiers consécutifs.
2. Si $n \geq 2$, la somme des racines n$^{\text{ème}}$ vaut 0, le produit vaut $(-1)^{n-1}$.
3. En particulier si $n = 3$, on pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On a $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$.

Théorème - Racines n$^{\text{ème}}$ d'un nombre complexe a non nul.[22]

1. Les racines n$^{\text{ème}}$ de a sont les $\sqrt[n]{|a|}e^{\frac{2ik\pi+iarg(a)}{n}}$ avec k variant dans une liste de n entiers consécutifs.
2. Si $n \geq 2$, la somme des racines n$^{\text{ème}}$ de a vaut 0, le produit vaut $(-1)^{n-1}a$.

Exercice.[23] Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ pour x dans $\mathbb{R}$.

I.8. Développement en éléments simples

Théorème.[24] Soient P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ et $Q = Q_1^{p_1} \dots Q_r^{p_r}$ la décompositions en facteurs irréductibles sur $\mathbb{K}$ de Q. Alors la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ se décompose de façon **unique** à l'ordre près des termes sous la forme :

$$F \quad = \quad E + \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{A_{i1}}{Q_i} + \frac{A_{i2}}{Q_i^2} + \dots + \frac{A_{ip_i}}{Q_i^{p_i}} \right) \qquad (*)$$

où E est le quotient de la division euclidienne de P par Q et les A_{ij} sont des polynômes tels que $\deg(A_{ik}) < \deg(Q_i)$ pour toutes valeurs de i et k possibles.

Remarques.

1. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les polynômes irréductibles sont de degré 1 ou de degré 2. Ainsi les polynômes A_{ij} sont constants si Q_i est de degré 1, ou dans $\mathbb{R}_1[X]$ si Q_i est de degré 2.
2. Le polynôme E est nul si $\deg(Q) > \deg(P)$, sinon son degré vaut $\deg(P) - \deg(Q)$.

Exemple. Par exemple :

$$\frac{X^7}{(X^2+1)^2(X-1)^3} \quad = \quad a + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2} + \frac{f}{X-1} + \frac{g}{(X-1)^2} + \frac{h}{(X-1)^3}$$

Méthode dans le cas d'un pole simple.[25] Si $p_i = 1$ et $Q_i = X - a$ alors A_{i1} est une constante. Pour la trouver, on multiplie par $X - a$ l'équation $(*)$ et on évalue en a. Dans les autres cas, on improvise.

Exercice.[26] Déterminer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^4 - 1} dx$

Exercice.[27]

1. Décomposer $\frac{P'}{P}$ en éléments simples pour tout polynôme scindé sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que si P est scindé sur $\mathbb{R}$ alors $PP'' - P'^2 \geq 0$.

II. Matrices.

II.1. Matrices élémentaires.

Définition. Soit p et q fixés dans $\mathbb{N}^*$. On note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ nulle partout sauf en position (i,j) où elle vaut 1.

Proprietes.[28]

1. $E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ si le produit précédent a un sens.
2. $(E_{ij})_{(i,j)\in\{1,\dots,p\}\times\{1,\dots,q\}}$ est une base de $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$. Plus précisément si $A = (a_{ij})$ alors $A = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij}E_{ij}$.

Exercice.[29] Déterminer $\mathrm{Vect}(\mathcal{G}l_n(\mathbb{K}))$. On pourra considérer les matrices $I_n + E_{ij}$.

II.2. La trace.

Définition. La trace d'une matrice carrée est la somme de ses éléments diagonaux.

Propriétés.[30]

1. $tr({}^tA) = tr(A)$ pour toute matrice carrée.
2. tr est une forme linéaire, cad une AL de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
3. $\forall A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$, $tr(AB) = tr(BA)$

Exercice.[31]

1. Vérifier que : $\forall A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{C}), \forall B \in \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{C}),\ tr(AB) = tr(BA)$
2. Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant $f(AB) = f(BA)$ pour tous A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

II.3. Matrices définies par blocs

Théorème.[32] Soient A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2 et D_2 des matrices et λ, μ dans $\mathbb{K}$.

1. Combinaison linéaire et produit.

$$\lambda\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda A_1 + \mu A_2 & \lambda B_1 + \mu B_2 \\ \lambda C_1 + \mu C_2 & \lambda D_1 + \mu D_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1.A_2 + B_1 C_2 & A_1.B_2 + B_1.D_2 \\ C_1.A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix}$$

   La seule condition étant que ces opérations soient cohérentes en terme de taille. Ces propriétés se généralisent même si les matrices sont coupées en plus ou moins de blocs. On fait comme si les blocs étaient des coefficients.

2. Transposée (Attention !)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{bmatrix}$$

3. Déterminant

$$det\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} = det(A).det(B)$$

4. Rang

$$rg\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq rg(A) + rg(B) \qquad rg\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = rg(A) + rg(B)$$

Exercice.[33] Soient A, B, C et D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier qu'en règle générale :

$$det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq det(AD - BC) \neq det(A)det(D) - det(B)det(C)$$

2. Montrer que si D est inversible et si C et D commutent alors :

$$det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det(AD - BC)$$

   On pourra utiliser la matrice : $\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$

II.4. Savoir interpréter les 0 d'une matrice

Définition et intérêt. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si et seulement si :

$$\forall x \in F,\ f(x) \in F$$

Intérêt : si F est stable par f alors l'endomorphisme $f|_F^F$ (la restriction de f à F à la source et au but) encore noté f_F existe. C'est l'endomorphisme induit par f sur F.

Propriétés.[34]

1. Si F et G sont stables par un endomorphisme u alors $F+G$ est encore stable par u.
2. Soit M la matrice d'un endomorphisme f dans une base $(e_1,\dots,e_n)$ de la forme :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_p)\dots f(e_q) & \dots & f(e_n) \end{array} & \\
M = & \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\ddots & & & 0 & \dots & 0 & & & \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots & & * & \\
 & & \ddots & 0 & \dots & 0 & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \\
 & * & & & A & & & * & \\
 & & & & & & & & \\
\hline
 & & & 0 & \dots & 0 & \ddots & & \\
 & * & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\
 & & & 0 & \dots & 0 & & & \ddots
\end{array}\right) &
\begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_{p-1} \\ \hline e_p \\ \vdots \\ e_q \\ \hline e_{q+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}
\end{array}
$$

L'espace vectoriel $F = vect\{e_p,\dots,e_q\}$ est stable par f, et A est la matrice de $u_{_F}$ dans la base $(e_p,\dots,e_q)$.

Remarques. En particulier :

1. Si M est une matrice diagonale alors toutes les droites vectorielles $\mathbb{K}e_i$ sont stables par f.
2. Si M est triangulaire supérieure alors les $F_k = Vect(e_1,\dots,e_k)$ sont stables par f.
3. Si M est triangulaire inférieure alors les $F_k = Vect(e_k,\dots,e_n)$ sont stables par f.

Exercice.[35] Soit $\beta = (e_1,\dots,e_5)$ une base d'un $\mathbb{K}$-ev E et f un endomorphisme de E tel que :

$$
[f]_{_\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}
$$

Donner 18 sev stables par f.

III. Opérations élémentaires et déterminants.

III.1. Matrices d'opérations élémentaires.

Définition.

1. Il existe 3 opérations élémentaires (OE) sur les lignes d'une matrice.

   - $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec λ dans $\mathbb{K}$. À la ligne i on additionne λ fois la ligne j
   - $L_i \leftrightarrow L_j$ On échange les lignes i et j.
   - $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec λ dans $\mathbb{K}^*$. On multiplie la ligne i par λ.

   Il existe les 3 mêmes OE sur les colonnes.
2. A chaque OE α, on associe l'OE α^{-1} définie par :

α	α^{-1}
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$
$L_i \leftrightarrow L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftarrow \lambda^{-1} L_i$

   On définit de même l'OE α^{-1} s'il s'agit d'une OE sur les colonnes.
3. Soit α une OE. La matrice d'OE associée à α de taille n est la matrice F_α obtenue en effectuant l'OE α sur la matrice unité I_n. Les noms de ces matrices sont respectivement : matrice de transvection, matrice de transposition et matrice de dilatation.
4. Si on peut passer de A à B par une suite d'OE sur les lignes, respectivement sur les colonnes ou sur les lignes et les colonnes, on note :
$$A \underset{L}{\sim} B \qquad A \underset{C}{\sim} B \qquad A \underset{LC}{\sim} B$$

Propriétés.[36]

1. Pour toute OE α, la matrice F_α est inversible et $F_\alpha^{-1} = F_{\alpha^{-1}}$.
2. Effectuer une OE α sur les lignes de A revient à multiplier A à gauche par F_α.
3. Effectuer une OE α sur les colonnes de A revient à multiplier A à droite par F_α.
4. Les relations $\underset{L}{\sim}$, $\underset{C}{\sim}$ et $\underset{LC}{\sim}$ sont des relations d'équivalence sur $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$.

III.2. Pivot de Gauss.

Définition.

1. Une matrice est échelonnée si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :
   — Les lignes de 0 sont regroupées sur le bas de la matrice c'est-à-dire que si la matrice contient une ligne de 0, les lignes suivantes sont aussi des lignes de 0.
   — Les premiers coefficients non nuls de chaque ligne (s'ils existent) se décalent strictement sur la droite de ligne en ligne. En d'autres termes si le premier coefficient non nul d'une ligne est sur la colonne i alors le premier coefficient non nul des lignes suivantes seront sur une colonne strictement supérieure à i.
2. Dans une matrice échelonnée, les premiers coefficients non nuls de chaque ligne sont appelés des pivots.
3. Une matrice est échelonnée réduite si et seulement si elle est échelonnée, les pivots sont égaux à 1 et les colonnes avec des pivots ne contiennent que des 0 à part le pivot.

Algorithmes du pivot de Gauss. Il existe un algorithme permettant de transformer toute matrice en :

Algorithme du pivot...	Matrice obtenue	Type d'OE
partiel sur les lignes	Matrice échelonnée	OE sur les lignes
complet sur les lignes	Matrice échelonnée réduite	OE sur les lignes
sur les lignes et les colonnes	$\left(\begin{array}{c\|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$	OE sur les lignes et les colonnes

Propriétés. [37]

1. Les seules matrices échelonnées réduites inversibles sont les matrices unités I_n pour n dans $\mathbb{N}^*$.
2. Toute matrice inversible est le produit de matrices d'OE.
3. Pour toute matrice, il existe une unique matrice échelonnée réduite qui lui soit équivalente par lignes.
4. Les matrices échelonnées équivalentes par lignes ont le même nombre de pivots. C'est par définition le rang de la matrice.

III.3. Décomposition LU.

Définitions.

1. Une Matrice A admet une décomposition LU si et seulement s'il existe une matrice triangulaire inférieure L (L pour Lower) avec des 1 sur la diagonale et une matrice triangulaire supérieur U (U pour Upper) vérifiant $A = LU$.
2. Le mineur dominant principal d'ordre k d'une matrice A est le déterminant de la sous-matrice de A obtenue en enlevant à A les lignes et les colonnes strictement supérieures à k.

Exemple. Les mineurs dominants d'ordre 1, 2 et 3 de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

sont :

$$|1| = 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Remarques importantes pour bien comprendre le théorème.

1. Les OE du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $j < i$ ne modifient pas les mineurs dominants principaux.
2. Si les mineurs dominants principaux sont non nuls, il n'y a pas besoin d'échanger des lignes dans l'algorithme du pivot de Gauss.

Théorème. [38] Soit A une matrice carrée dont les mineurs dominants principaux sont non nuls.

1. Montrer A admet une décomposition LU.
2. Montrer que cette décomposition est unique.

Exercice.[39] Déterminer la décomposition LU de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

III.4. Déterminant de Vandermonde.

Théorème - Déterminant de Vandermonde.[40] Soient λ_0, ..., λ_n dans $\mathbb{K}$.

$$V(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \underset{def}{=} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \dots & \lambda_0^n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Ce déterminant appelé déterminant de Vandermonde. En particulier, il est non nul si et seulement si les coefficients λ_0, ..., λ_n sont distincts.

Exercice - Vandermonde incomplet.[41] En fonction des réels a, b, c et d, donner la valeur de :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

Exercice - Vandermonde perturbé.[42] Soient a, b, c et d des réels. Posons :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \end{vmatrix} \qquad f(x) = \begin{vmatrix} x+1 & x+1 & x+1 & x+1 \\ x+a & x+b & x+c & x+d \\ x+a^2 & x+b^2 & x+c^2 & x+d^2 \\ x+a^3 & x+b^3 & x+c^3 & x+d^3 \end{vmatrix}$$

1. Montrer que l'application f est affine.
2. En déduire Δ.

Remarques.

1. Les deux exercices précédents se généralisent bien sûr aux matrices de taille $n \times n$.
2. Notons J est la matrice ne contenant que des 1 (C'est la matrice Atilla). La méthode pour résoudre l'exercice est à employer dès qu'on cherche $det(\alpha J + A)$ et que l'on a $det(A)$ et $det(\beta J + A)$ pour un certain β

Exercice. [43] Montrer que les familles de fonctions suivantes sont libres :

1. $\left(e^{\alpha_1 t}, \dots, e^{\alpha_n t}\right)$ avec $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ distincts dans $\mathbb{C}$.
2. $(\cos \alpha_1 t, \dots, \cos \alpha_n t)$ avec $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ distincts dans $\mathbb{R}^+$.
3. $(\sin \alpha_1 t, \dots, \sin \alpha_n t)$ avec $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ distincts dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice. [44] Le but de l'exercice est de redémontrer l'existence des polynômes de Lagrange avec le déterminant de Vandermonde. Soient $a_0, \dots, a_n$ distincts dans $\mathbb{R}$ et notons ϕ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \ \phi(P) = (P(a_0), \dots P(a_n))$$

1. Montrer que ϕ est un isomorphisme.
2. En déduire qu'il existe une famille de polynômes $(L_0, \dots, L_n)$ qui forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et qui vérifie :

$$\forall i, j \in \{0, \dots, n\},\ \ L_i(a_j) = \delta_{ij}$$

III.5. Déterminant d'une homothétie perturbée.

Exercice. [45] Soit a, b et c dans $\mathbb{R}$. Posons :

$$\Delta_1(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} \qquad \Delta_2(a,b,c) = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer $\Delta_1(a,b)$ à l'aide d'OE.
2. Notons A_{abc} la matrice associée au déterminant $\Delta_2(a,b,c)$ et posons $f(x) = det(A_{abc} + xJ)$ avec J la matrice ne contenant que des 1. Montrer que f est affine.
3. En déduire la valeur de $\Delta_2(a,b,c)$ pour $b \neq c$.
4. En admettant que Δ_2 soit continue par rapport à c, retrouver la valeur de Δ_1 à l'aide de celle de Δ_2.

IV. Algèbre linéaire.

IV.1. Produits, sommes directes et recollement de bases.

Théorème.[46]

1. Soient $E_1,\dots,E_n$ des $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors le produit cartésien $E_1\times\dots\times E_n$ muni des lois :
$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall(x_1,\dots,x_n),\ (y_1,\dots,y_n)\in E_1\times\dots\times E_n,\ \begin{cases}(x_1,\dots,x_n)\ +\ (y_1,\dots,y_n) & = & (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)\\ \lambda.(x_1,\dots,x_n) & = & (\lambda.x_1,\dots,\lambda.x_n)\end{cases}$$
est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Si les $E_1,\dots,E_n$ sont de dimension finie alors :
$$\dim(E_1\times\dots\times E_n)\ =\ \dim(E_1)\ +\ \dots\ +\ \dim(E_n)$$

Définition-Théorème. Soient F_1,..., F_n des sous espaces vectoriels de E.

1. La somme $F_1+\dots+F_n$ est le sous espace vectoriel de E définie par :
$$F_1\ +\ \dots\ +\ F_n\ =\ \Big\{x_1+\dots+x_n\ /\ \forall i\in\{1,\dots,n\},\ x_i\in F_i\Big\}$$
2. La somme $F_1+\dots+F_n$ est directe si tout élément x de $F_1+\dots+F_n$ se décompose de manière unique en $x_1+\dots+x_n$ où chaque x_i est dans F_i. On note $F_1\oplus\dots\oplus F_n$.

Théorème.[47] Il y a équivalence entre :

$$\Updownarrow\ \begin{array}{l} F_1\ \oplus\ \dots\ \oplus\ F_n\\ x_1+\dots+x_n=0\ \Longrightarrow\ x_1=\dots=x_n=0\\ \forall i\in\{1,\dots,n\},\ (F_1+\dots+F_{i-1}+F_{i+1}+\dots+F_n)\ \cap\ F_i\ =\ \{0\}\end{array}$$

Remarques.

1. Attention ! $F_1\oplus\dots\oplus F_n$ est à la fois l'ensemble $F_1+\dots+F_n$ et une proposition (unicité de la décomposition).
2. Dans le cas $n=2$, on a :
$$F_1\oplus F_2\ \Longleftrightarrow\ F_1\cap F_2=\{0\}$$
3. Pour que la somme soit directe, $F_1\cap F_2\cap\dots\cap F_n=\{0\}$ ne suffit pas, ni $F_i\cap F_j=\{0\}$ pour tout i et j différents. Il suffit de prendre trois droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ non confondues deux à deux pour avoir un contre-exemple.

Théorème - Recollement de bases.[48] Soient $F_1,\dots,F_n$ des sev d'un $\mathbb{K}$-ev de DF E.

1. Notons β_1,...,β_n des bases respectivement des sev $F_1,\dots,F_n$:
$$E=F_1\oplus\dots\oplus F_n\quad\Longleftrightarrow\quad \beta_1\cup\dots\cup\beta_n \text{ est une base de } E$$
où $\beta_1\cup\dots\cup\beta_n$ désigne la famille contenant la liste des vecteurs de β_1 puis ceux de β_2, etc...On dit que $\beta_1\cup\dots\cup\beta_n$ est une base de E adaptée à la somme directe $F_1\oplus\dots\oplus F_n$
2. De plus :
$$\begin{cases} dim(F_1\oplus\dots\oplus F_n) & = & dim(F_1)\ +\ \dots\ +\ dim(F_n)\\ dim(F_1+\dots+F_n) & \le & dim(F_1)\ +\ \dots\ +\ dim(F_n)\end{cases}$$
De plus il y a égalité si et seulement si la somme est directe.

Remarque. On a $F_1 \oplus \ldots \oplus F_2 \sim F_1 \times \ldots \times F_2$, puisque les dimensions sont les mêmes.

Exemple. Ainsi, en appliquant le théorème précédent en prenant F_1,...F_n égaux à des droites vectorielles, on trouve :

$$E = \mathbb{K}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}e_n \iff (e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base de } E$$

On rappelle que $\mathbb{K}e_i = Vect\{e_i\}$.

IV.2. Sommes directes en pratique.

Méthode - Comment montrer que $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$? [49]

Si on connait les dimensions des F_i et de E et si elles sont finies.	Sinon
Etape 1 On montre que 0 se décompose de manière unique dans $F_1 + \ldots + F_n$	Etape 1 On montre que 0 se décompose de manière unique dans $F_1 + \ldots + F_n$
Etape 2 On vérifie que : $dim(E) = dim(F_1) + \ldots + dim(F_n)$	Etape 2 On montre que tout vecteur x se décompose dans la somme $F_1 + \ldots + F_n$

Remarque très importante. Si $n = 2$ alors on remplace l'étape 1 par $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Exercice - Sommes directes classiques.[50]

1. Montrer que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$$

2. Montrer que :

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

avec $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{I}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les $\mathbb{R}$-ev des fonctions paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

IV.3. Rang.

Définitions. Le rang est défini pour 3 objets mathématiques différents :

- Pour une matrice A : $\quad \mathrm{rg}(A)$ = nombre de pivots.
- Pour une application linéaire f : $\quad \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$
- Pour une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$: $\quad \mathrm{rg}(u_1, \ldots, u_p) = \dim(vect(u_1, \ldots, u_p))$

Liens entre ces 3 rangs. Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de E. Alors pour toutes bases $\beta_E = (e_1,\dots,e_n)$ de E et β_F de F :

- $rg(f) \;=\; rg\Big(\,[f]_{\beta_E\beta_F}\,\Big)$
- $rg(u_1,\dots,u_p) \;=\; rg\Big(\,[(u_1,\dots,u_p)]_{\beta_E}\,\Big)$
- $rg(f) \;=\; rg\Big(f(e_1),\dots,f(e_n)\Big)$

Propriétés.[51]

1. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A inversible si et seulement si $rg(A) = n$.
2. Soit $\mathcal{F}$ une famille d'un $\mathbb{K}$-ev E de DF.
   - $\mathcal{F}$ est une famille libre si et seulement si $rg(\mathcal{F})$ est égal au nombre de vecteurs de $\mathcal{F}$.
   - $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E si et seulement si $rg(\mathcal{F}) = dim(E)$.
   - $\mathcal{F}$ est une famille base si et seulement si $rg(\mathcal{F}) = dim(E)$ et si $rg(\mathcal{F})$ est égal au nombre de vecteurs de $\mathcal{F}$.
3. Soit f une AL de E dans F avec E et F des $\mathbb{K}$-ev de DF.
   - f est injective si et seulement si $rg(f) = dim(E)$.
   - f est surjective si et seulement si $rg(f) = dim(F)$.
   - f est bijective si et seulement si $rg(f) = dim(E) = dim(F)$.

Remarque. Pour trouver le rang d'une AL, d'une famille ou d'une matrice, il suffit de se ramener au rang d'une matrice et d'utiliser le pivot de Gauss.

Exercice.[52] Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et f, $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$\begin{array}{ccccc} rg(f)+rg(g)-n & \leq & rg(f\ o\ g) & \leq & min(\,rg(f), rg(g)\,) \\ |\,rg(f)-rg(g)\,| & \leq & rg(f+g) & \leq & rg(f)+rg(g) \end{array}$$

IV.4. Le théorème du rang.

Théorème.[53]

1. Soit E un k-ev de DF, F un k-ev de dimension quelconque et f une AL de E dans F, on a alors $Im(f)$ est de DF et :

$$dim(E) \;=\; rg(f) \;+\; dim(Ker(f))$$

2. Soit A dans $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$, alors :

$$q \;=\; rg(A) \;+\; dim(Ker(A))$$

Conséquences.[54] Dans les mêmes conditions que dans le théorème :

1. Une AL conserve ou abaisse la dimension, c'est-à-dire pour tout sev H de DF de E :
$$dim(f(H)) \ \leq \ dim(H)$$
elle la conserve pour tout sev si et seulement si f injective.
2. Si de plus $dim(E) = dim(F)$ alors :
$$f \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ bijective}$$

IV.5. Invariants de similitude.

Définition - invariants pour une relation d'équivalence. Soit E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

1. Un invariant de $\sim$ est une application dont E est l'espace de départ et qui est constante sur les classes d'équivalence. Formellement, l'application f est un invariant si et seulement si :
$$\forall x \in E, \ \ x \sim y \implies f(x) = f(y)$$
2. Un invariant idéal de $\sim$ est une application qui sépare les classes c'est-à-dire une application f telle que :
$$\forall x \in E, \ \ x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

Remarques.

1. A quoi sert un invariant ? Il sert à vérifier que 2 éléments ne sont **pas** équivalents. En effet si $f(x) \neq f(y)$ alors $x \not\sim y$. Un invariant (non idéal) ne peut pas servir à montrer que des éléments sont équivalents.
2. A quoi sert un invariant idéal ? Il sert à vérifier que 2 éléments sont ou ne sont pas équivalents. En effet si $f(x) = f(y)$ alors $x \sim y$, sinon $x \not\sim y$.
3. Quand on a une relation d'équivalence, on cherche un invariant idéal. Si on en trouve un, on s'arrête. Si on n'en a pas, on cherche autant d'invariants que possible en espérant que la quantité remplace le manque de qualité.

Propriétés.[55]

1. Le rang, le déterminant et la trace sont des invariants pour la relation $\sim$. On dit que ce sont des invariants de similitude. Aucun d'eux n'est un invariant idéal.
2. Le rang est un invariant pour les relations $\underset{L}{\sim}$, $\underset{C}{\sim}$ et $\underset{LC}{\sim}$ (Attention ce n'est pas le cas pour le déterminant et la trace).
3. Le rang est un invariant idéal pour la relation $\underset{LC}{\sim}$, cad que pour A et B dans $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$
$$A \underset{LC}{\sim} B \quad \Longleftrightarrow \quad rg(A) \ = \ rg(B)$$

Définition. Soit u un endomorphisme, on appelle $det(u)$ le déterminant de l'une de ses matrices (peut importe laquelle puisque det est un invariant de similitude). De même on définit $tr(u)$ la trace de l'une de ses matrices. On peut rééditer l'exploit à chaque fois que l'on découvre un invariant de similitude.

Méthode.[56] Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Comment montrer que A et B ne sont pas semblables ? On montre que $det(A) \neq det(B)$ **ou** $rg(A) \neq rg(B)$ **ou** $tr(A) \neq tr(B)$.
2. Comment montrer que A et B sont semblables ? On considère l'AL canoniquement f_A associée à A et on montre qu'il existe une base dans laquelle la matrice de f_A est B.

Exercice.[57]

1. Montrer que les matrices A et B ne sont pas semblables dans les 3 cas suivants :

	$Cas1$	$Cas2$	$Cas3$
A	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
B	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Montrer que :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.6. Projections et symétries.

Définitions. Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G des sev de E tels que $E = F \oplus G$. Tout x de E se décompose alors de manière unique en $x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

1. L'application p qui a x associe x_1 est appelée projection sur F de direction G. On a donc :

$$p: \begin{array}{ccc} F \oplus G & \to & E \\ x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 \end{array}$$

2. L'application s qui a x associe $x_1 - x_2$ est appelée la symétrie par rapport à F de direction G. On a donc : la fonction :

$$s: \begin{array}{ccc} F \oplus G & \to & E \\ x_1 + x_2 & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array}$$

Théorème.[58] Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

1. Soit p une application de E dans E alors
$$p \text{ est une projection de } E \iff \begin{cases} p \text{ est une application linéaire,} \\ p\,o\,p \;=\; p \end{cases}$$
De plus p est une projection sur $Im(p) = Ker(p - Id)$ par rapport à $Ker(p)$.
2. Soit s une application de E dans E alors
$$s \text{ est une symétrie de } E \iff \begin{cases} s \text{ est une application linéaire,} \\ s\,o\,s \;=\; Id_E \end{cases}$$
De plus s est une symétrie par rapport $Ker(s - Id)$ parallèlement à $Ker(s + Id)$.
3. Soit F et G des sev de E vérifiant $E = F \oplus G$. Notons s la symétrie par rapport à F et de direction G et p la projection sur F par rapport à G. On a alors :
$$s \;=\; 2p - Id$$

Remarque très utile. Si p est la projection sur F de direction G alors $Id - p$ est la projection sur G de direction F.

Exercice.[59] Soit p une projection d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que : $tr(p) = rg(p)$.

Exercice.[60] Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Notons par ϕ l'application de E dans E définie par :
$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\quad \phi(f)(x) \;=\; f(-x)$$
Montrer que ϕ est une symétrie dont vous donnerez les éléments caractéristiques. Quelle est la projection associée ?

IV.7. Formes linéaires et hyperplans.

Définitions. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Un sev H de E est un hyperplan de E si et seulement sa dimension est égale à $dim(E) - 1$.
2. L'espace dual de E est $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Ainsi E^* contient l'ensemble des formes linéaires de E.

Remarques.

1. Les hyperplans en dimension 2 sont les droites vectorielles.
2. Les hyperplans en dimension 3 sont les plans vectoriels.
3. $dim(E^*) \;=\; dim\,(\mathcal{L}(E, \mathbb{K})) \;=\; dim(E)$

Théorème - Liens entre formes linéaire et hyperplans.[61] Soit E un espace vectoriel (de dimension finie).

1. Le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.
2. Inversement, tout hyperplan est le noyau d'au moins une forme linéaire non nulle.
3. Les formes linéaires non nulles ayant le même hyperplan pour noyau sont proportionnelles.

Théorème - Equation d'un hyperplans.[62] Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On se place dans une base de E.

1. Les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ des vecteurs d'un hyperplan en DF sont exectement les solutions d'une équation du type :
$$a_1 x_1 \;+\; \ldots \;+\; a_n x_n \;=\; 0$$
avec $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, , \ldots, 0)$.
2. Inversement les solutions d'une équation de ce type forment un hyperplan.
3. Deux équations d'un hyperplan représentent le même hyperplan si et seulement si les équations sont proportionnelles.

Remarques.

1. Le premier théorème est encore vrai en dimension infinie à condition d'étendre la définition des hyperplans. Pas le second puisqu'on se place dans une base.
2. Les droites vectorielles en dimension 2 sont de la forme $ax + by = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$
3. Les plans vectoriels en dimension 3 sont de la forme $ax + by + cz = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$
4. Les droites vectorielles en dimension 3 sont de la forme :
$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$$
avec (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) non proportionnelles (On les exprime comme l'intersection de 2 plans sécants distincts).

Exercice.[63] Posons $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, P(1) = 0 \right\}$.

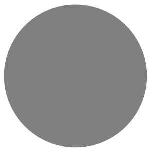
1. Montrer que H est un hyperplan.
2. Déterminer une équation de H dans la base canonique.
3. Déterminer toutes les formes linéaires ayant H pour noyau.

IV.8. Parties convexes.

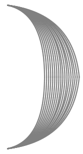
Définitions.

1. Soit x et y dans E. Le segment $[x, y]$ est l'ensemble :
$$[x, y] \;=\; \left\{ \lambda.x + (1 - \lambda).y \;\;/\;\; \lambda \in [0, 1] \right\}$$
2. Une partie A de E est convexe ssi pour tous x, y de A, le segment $[x, y]$ est encore dans A. Ainsi A est convexe si et seulement si :
$$\forall x, y \in A, \;\; \forall \lambda \in [0, 1], \;\; \lambda.x \;+\; (1 - \lambda).y \;\in\; A$$
3. Un combinaison linéaire convexe (CLC) de $x_1, \ldots, x_n$ dans E est une expression du type
$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ avec $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}^+$.
4. Un ensemble A est stable par CLC ssi pour tous $x_1, \ldots x_n$ de A les CLC de $x_1, \ldots, x_n$ sont encore dans A.
5. Soit A une partie de E. On note $Conv(A)$ le plus petit convexe contenant A. C'est l'enveloppe convexe de A

Exemples. Dans $\mathbb{R}^2$:



Convexe



Non convexe

Théorème.[64]

1. $\varnothing$ est convexe.
2. A est convexe ssi A est stable par CLC
3. L'intersection de convexes est encore un convexe.
4. Les espaces vectoriels et les boules d'un evn sont convexes.
5. Pour toute partie A, l'enveloppe convexe $conv(A)$ est l'ensemble des CLC que l'on peut former avec des éléments de A.

Exercice.[65] Montrer que $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ / \ a+b+c+d = 1 \right\}$ est convexe. Est-ce un espace vectoriel ?

Exercice.[66] Montrer que l'ensemble des polynômes à coefficients positifs est convexe.

Exercice.[67] Montrer que dans $\mathbb{R}$, les convexes sont exactement les intervalles.

Exercice.[68] On dit qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique si :

- Tous les coefficients de M sont dans $[0,1]$,
- La somme des coefficients d'une même ligne fait 1.

1. Posons U la matrice colonne ne contenant que des 1. Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}^+)$ est une matrice stochastique si et seulement si $AU = U$.
2. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.