Intégrales généralisées.

PSI

Chapitre 1

I. Construction de l'intégrale.

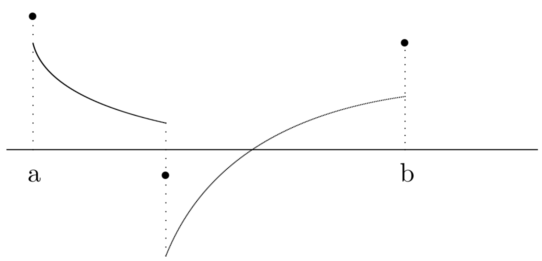
I.1. Fonctions continues par morceaux.

Définitions. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ ssi il existe une subdivision $(x_0,\ldots,x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout i de $\{0,\ldots,n-1\}$:
   - f est continue sur $]x_i,x_{i+1}[$,
   - $\lim\limits_{x\to x_i^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to x_{i+1}^-} f(x)$ existent dans $\mathbb{R}$.
2. f est continue par morceaux sur l'intervalle I ssi elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.
3. On note $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I.

Exemples.

1. Une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$:



2. $f(x)=\frac{1}{x}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Par contre si on prolonge f en 0, elle n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

Propositions.[1]

1. Si f est continue sur I alors f est continue par morceaux sur I.
2. Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée et elle a un nombre fini de discontinuités.
3. Une CL d'applications continues par morceaux sur un intervalle I est encore une fonction continue par morceaux sur I. Ainsi $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev.
4. Un produit d'applications continues par morceaux sur un intervalle I est encore une fonction continue par morceaux sur I. (CC : $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$ devient une $\mathbb{R}$-algèbre).

Remarque. Contrairement à une fonction continue par morceaux sur un segment, une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque peut avoir une infinité de points de discontinuité. Par exemple, la fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et a un nombre infini de discontinuité.

I.2. Rappel : construction de l'intégrale sur un segment

Construction.

1. On commence par définir l'intégrale des fonctions en escaliers. Cette intégrale est la somme des aires algébriques des rectangles situés entre la courbe et l'axe $(0x)$.
2. Ensuite pour une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$, on définit :

$$\int_a^b f = sup\left\{\int_a^b g \ / \ g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } g \leq f\right\}$$

3. si $a > b$, on pose : $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$
4. Enfin si f est continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$:

$$\int_a^b f = \int_a^b Re(f) + i\int_a^b Im(f)$$

Proprietes.[2] Soient f est g dans $\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$.

1. **linéarité :** $\displaystyle\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda\int_a^b f + \mu\int_a^b g$
2. **Chasles :** $\displaystyle\int_x^z f = \int_x^y f + \int_y^z f$ pour tous x, y, z de $[a, b]$
3. **Croissance :** $\displaystyle f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$
4. **Stricte croissance avec des fonctions continues :** Si f et g sont continues sur $[a, b]$ alors :

$$f < g \Longrightarrow \int_a^b f < \int_a^b g$$

5. **Inégalité triangulaire :** $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$
6. **Intégrale et primitive :** si f est continue et F est une primitive de f alors : $\displaystyle\int_a^b f = [F(x)]_a^b$
7. **IPP :** si f et g sont C^1 sur $[a, b]$ alors : $\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g$
8. **Changement de variable :** si ϕ est C^1 sur $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(X)dX$$

I.3. Intégrale généralisée.

Définition de l'intégrale généralisée.

1. Soit f est dans $\mathcal{C}_m([a,b[,\mathbb{K})$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge ssi $\displaystyle\lim_{x \to b} \int_a^x f$ existe. Cette limite est encore notée $\displaystyle\int_a^b f$. On parle d'intégrale impropre en b.
2. Soit f est dans $\mathcal{C}_m(]a,b],\mathbb{K})$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge ssi $\displaystyle\lim_{x \to a} \int_x^b f$ existe. Cette limite est encore notée $\displaystyle\int_a^b f$. On parle d'intégrale impropre en a.
3. Soit f est dans $\mathcal{C}_m(]a,b[,\mathbb{K})$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge ssi il existe c dans $]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent. Dans ce cas on pose :

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

   On parle d'intégrale impropre en a et b.

Remarques.

1. On a encore $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f$ et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b Re(f) + i\int_a^b Im(f)$.
2. Ainsi face une intégrale, on cherche tout d'abord les valeurs pour lesquelles elle est impropre. Ce sont les valeurs du domaine d'intégration pour lesquelles la fonction n'est pas définie. Puis on étudie la convergence en ces points et enfin on calcule la valeur de l'intégrale.
3. Dans le point 3 de la définition, s'il existe une valeur c qui convient alors toutes les valeurs de $]a,b[$ conviennent. De plus, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ ne dépend pas de c.

Exercices.[3]

1. Montrer que :

$$\int_0^1 \ln(x)dx = -1 \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

2. puis montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$ converge si et seulement si $\alpha > 0$

Attention. Lorsque l'intégrale est impropre sur les deux bornes, il faut bien gérer les deux bornes séparément. Le raisonnement suivant est **faux** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} xdx = \lim_{a \to +\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-a}^{a} = \lim_{a \to +\infty} 0 = 0$$

C'est faux car $\displaystyle\int_0^{+\infty} xdx$ est divergente, il en est donc de même pour $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xdx$.

I.4. Propriétés élémentaires.

Notations.

1. $[a, b]$ désignera indifféremment $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$ ou $[a, b]$. Lorsque l'intervalle est ouvert, les bornes peuvent valoir $\pm\infty$. De plus, on notera $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. Pour F définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on pose :

$$\left[F(x)\right]_a^b \;=\; \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x)$$

On dira que ce crochet converge si les limites convergent. Attention, comme pour l'intégrale, les bornes de cette double limite doivent être gérée séparément. On fait tendre x vers a puis y vers b.

Propriétés.[4] Les propriétés sont sensiblement les mêmes que pour l'intégrale sur un segment, mis à part quelques hypothèses de plus sur la convergence. Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, g dans $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent.

1. **linéarité :** L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \lambda f + \mu g$ est convergente et :

$$\int_a^b \lambda f + \mu g \;=\; \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

2. **Chasles :** $\displaystyle\int_x^z f \;=\; \int_x^y f + \int_y^z f$ pour tous x, y, z de $[a, b]$
3. **Croissance :** $\displaystyle f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$
4. **Stricte croissance avec des fonctions continues :** Si f et g sont continues sur $]\!]a, b[\![$ alors :

$$f < g \;\Longrightarrow\; \int_a^b f < \int_a^b g$$

5. **Inégalité triangulaire :** si $\displaystyle\int_a^b |f|$ est convergente alors $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \;\leq\; \int_a^b |f|$
6. **Intégrale et primitive :** soit F une primitive d'une application continue par morceaux f sur I. Si $[F(x)]_a^b$ converge alors :

$$\int_a^b f \;=\; \left[F(x)\right]_a^b$$

Remarque.

1. Pour utiliser l'inégalité triangulaire, il faut que $a \leq b$. Si ce n'est pas le cas, on a :

$$a \geq b \;\Longrightarrow\; \left|\int_a^b f\right| \;\leq\; \int_b^a |f|$$

2. La contraposée du 4 avec $f = 0$ se traduit par :

$$\begin{cases} g \text{ continue} \\ \displaystyle\int_a^b g = 0 \\ g \geq 0 \end{cases} \;\Longrightarrow\; g \;=\; 0$$

I.5. Intégrale faussement impropre.

Définition. Soit $\displaystyle\int_a^b f$ une intégrale impropre en b avec b un **réel**. L'intégrale est dite faussement impropre en b si et seulement si f admet un prolongement par continuité en b, c'est-à-dire si

$$\lim_{x\to b} f(x) \in \mathbb{R}$$

On a une définition similaire si l'intégrale est impropre en a avec a est réel.

Remarques.

1. Une intégrale n'est **JAMAIS** faussement impropre en $\pm\infty$!
2. Lorsqu'on étudie la convergence d'une intégrale impropre en un réel a, on commence toujours par calculer la limite de la fonction en a pour savoir s'il s'agit d'une intégrale faussement impropre.

Théorème.[5] Toute intégrale faussement impropre en un réel a est convergente en a.

Exercice.[6] Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_0^1 x\ln(x)dx \qquad \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x}dx \qquad \int_0^1 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

I.6. Divergence grossière en $\pm\infty$.

Propriété.[7] Soient f dans $\mathcal{C}_m([a;+\infty[,\mathbb{R})$ et l dans $\bar{\mathbb{R}}$. Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \neq 0$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est divergente. On dit qu'elle est grossièrement divergente. Idem en $-\infty$

Remarques.

1. Il n'y a **JAMAIS** de divergence grossière en un réel, c'est uniquement en $\pm\infty$.
2. Contrairement aux séries, on ne peut pas conclure si f n'a pas de limite. On verra par exemple que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx$ est convergente.

Pour les séries

limite de (a_n) en $+\infty$	Nature de la série $\sum a_n$
$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$	?
(a_n) n'a pas de limite en $+\infty$	diverge
$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \neq 0$	diverge

Pour les intégrales

Limite de $f(x)$ en $+\infty$	Nature de $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$	?
f n'a pas de limite en $+\infty$	?
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \neq 0$	diverge

I.7. IPP et changement de variables.

Propriété.[8]

1. **IPP :** si f et g sont C^1 sur $]a,b[$ et $\left[fg\right]_a^b$ converge alors $\displaystyle\int_a^b fg'$ et $\displaystyle\int_a^b f'g$ sont de même nature et en cas de convergence on a :

$$\int_a^b fg' = \left[fg\right]_a^b - \int_a^b f'g$$

2. **Changement de variable :** si f est continue par morceaux sur $]a,b[$ et ϕ est une bijection strictement monotone de classe C^1 sur $]a,b[$ alors : $\displaystyle\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx$ et $\displaystyle\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(X)dX$ sont de même nature et en cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(X)dX$$

Exercice.[9] Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? En cas de convergence, déterminer leur valeur.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}+t}dt \qquad I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\sin(t)}dt$$

Remarque.[10] Que faire si on souhaite faire une IPP généralisée sur une intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ impropre en b, et que le crochet ne converge pas ?
On effectue une IPP classique sur l'intégrale $\displaystyle\int_a^{b-\varepsilon} f$ et on fait tendre ε vers 0.
Par exemple, montrez que l'intégrale suivante est convergente et déterminez sa valeur :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2}dt$$

Exercice.[11] Soient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt \qquad K = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t))dt$$

1. Montrer que $L = \displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente. En déduire la convergence de I.
2. Grâce à un changement de variable, montrer que J est convergente. Quel rapport existe-t-il entre I et J ?
3. En calculant $I+J$, montrer que K est convergente et que $K = 2I$.
4. En déduire la valeur de I.

II. Intégration des fonctions positives.

II.1. Intérêt.

Remarque fondamentale. Si f continue par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors :

$$x \mapsto \int_a^x f \quad \text{est croissante} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \int_x^b f \quad \text{est décroissante}$$

ce qui permet d'affirmer en utilisant le théorème des limites monotones que :

$$\int_a^b f \quad \text{est convergente en } b \quad \text{si et seulement si} \quad \int_a^x f \quad \text{est majorée}$$

$$\int_a^b f \quad \text{est convergente en } a \quad \text{si et seulement si} \quad \int_x^b f \quad \text{est majorée}$$

II.2. Intégrales de référence : intégrales de Riemann.

Théorème.[12] Soit s un réel :

1. l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ est convergente en $+\infty$ si et seulement si $s > 1$,
2. l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ est convergente si en 0 et seulement $s < 1$.

Remarque.

1. Très forte analogie avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ qui converge si et seulement si $s > 1$.
2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ est divergente pour tout s de $\mathbb{R}$.

II.3. Théorème de comparaison.

Théorème.[13] Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur $]a,b]$ telles que

- f et g sont **positives** (c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$).
- l'une des propriétés suivantes est vérifiées au voisinage de a :

$$f \leq g \qquad f = o(g) \qquad f = O(g) \qquad f \sim g$$

Alors :

- si $\displaystyle\int_a^b g$ convergente alors $\displaystyle\int_a^b f$ convergente.
- si $\displaystyle\int_a^b f$ divergente alors $\displaystyle\int_a^b g$ divergente.

On a bien sûr un résultat similaire si l'intégrale est impropre en b.

Exercice.[14] Soit s dans $]1;+\infty[$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^s} dx$ est convergente.

II.4. Conséquence pour les fonctions équivalentes.

Théorème.[15] Soient f et g des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telles que $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ impropres en a. On a alors :

$$f \underset{a}{\sim} g \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f \text{ et } \int_a^b g \text{ sont de même nature.}$$

avec un résultat similaire si l'intégrale est impropre en b.

Exercice.[16] Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \qquad\qquad \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

II.5. Théorème de comparaison série-intégrale.

Théorème.[17] Soit f dans $\mathcal{C}_m([1,+\infty[,\mathbb{R}^+)$ décroissante, on a alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} f \quad \text{sont de même nature.}$$

Remarque. En général, on utilise ce théorème quand $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car sinon le théorème précédent est évident puisque l'intégrale et la série sont grossièrement divergentes. C'est pourquoi nous avons supposé f à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ ce qui n'est pas nécessaire.

Exercice.[18] Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

Exercice.[19] Déterminer la nature de la série : $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln(n)}$

III. Intégration des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

On note $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I l'intervalle $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$.

III.1. Convergence absolue.

Définitions.

1. L'intégrale $\int_I f$ est dite absolument convergente si et seulement si $\int_a^b |f|$ est convergente.
2. Toute intégrale convergente et non AC est dite semi-convergente.
3. f est dite intégrable sur I ssi f est continue par morceaux et $\int_I f$ est absolument convergente.

Théorème.[20] Toute intégrale AC sur I est convergente sur I.

Remarque. Ce théorème est très utile puisqu'il nous permet de se ramener à l'intégrale d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'utiliser toutes les résultats de la section précédente.

Exercice.[21]

1. Montrer que f est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si $x \mapsto f(x+a)$ est intégrable sur $]0;b-a]$
2. Soit a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $b > a$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α pour que la fonction :

$$f_a(x) = \frac{1}{(x-a)^\alpha}$$

   soit intégrable sur $[a,b[$.

III.2. Intégrale de Dirichlet et conséquences.

Exercice. [22] Soit α dans $\mathbb{R}$. Notons :

$$D_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

1. Soit β dans $\mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout α de $\mathbb{R}$, l'intégrale D_α est de même nature que :

$$S_{\alpha,\beta} = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\beta t)}{t^\alpha} dt$$

   On pourra remarquer (aucune preuve demandée) et utiliser qu'on a, dans chaque question, un résultat similaire en remplaçant *sin* par *cos*.
2. Si $\alpha > 1$, montrer que D_α est absolument convergente.
3. Si $\alpha \in]0,1]$, montrer que :
   — D_α est convergente.
   — D_α n'est pas absolument convergente. On pourra utiliser que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \geq \sin^2(x)$.
4. Si $\alpha \leq 0$, montrer que D_α est divergente. On pourra montrer que la suite (a_n) ne tend pas vers 0 avec :

$$a_n = \int_{\pi n}^{\pi n+\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha} dt$$

Exercice - intégrales de Fresnel. [23] Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)dx \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx$$

Exercice. [24] Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ est convergente et qu'elle vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

III.3. Comparaison à une fonction intégrable.

Théorème. [25] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$ et g dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$. On a alors :

$$\begin{cases} |f| \leq g \\ g \text{ intégrable sur } I \end{cases} \implies f \text{ intégrable sur } I$$

Remarques.

1. Ceci permet de gérer tous les valeurs où l'intégrale est impropre en même temps.
2. Les valeurs absolues autour de f sont indispensables !

Exercice. [26] Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-t} dt$ est convergente.

Exercice.[27] Pour f et g dans $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$, posons

$$(f/g) \ = \ \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

1. Montrer que l'intégrale définissant $(\ldots/\ldots)$ converge.
2. Montrer que $(\ldots/\ldots)$ est un produit scalaire sur E.
3. Pourquoi $(\ldots/\ldots)$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{F}([-1,1],\mathbb{R})$.

III.4. Règle du t^α en $\pm\infty$.

Méthode.[28] Soit f dans $\mathcal{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{C})$. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha |f(t)|$ existe dans $\mathbb{R}$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est AC donc convergente en $+\infty$.

Remarques.

1. Idem en $-\infty$ mais faux en un réel.
2. Attention, pour la rédaction, il faut refaire la preuve à chaque fois, car cette méthode n'est pas dans le programme officiel.

Exercice - intégrale de Gauss.[29] Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est convergente.

III.5. Technique de l'éclatement.

Méthode.[30] Soit f dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{C})$. Afin de prouver la convergence ou la divergence de l'intégrale $\int_I f$, on décompose f, souvent à l'aide d'un développement limité, comme une somme :

$$f \ = \ f_1 \ + \ \ldots \ + \ f_n$$

avec $f_1,\ldots,f_n$ dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{C})$.

— Si toutes les intégrales $\int_I f_k$ convergent pour k dans $[\![1,n]\!]$, alors $\int_I f$ converge.
— Si toutes les intégrales $\int_I f_k$ convergent pour k dans $[\![1,n]\!]$ sauf une qui divergent, alors $\int_I f$ diverge.
— Dans les autres cas, on ne peut pas conclure.

Attention ! [31] Soit f, f_1 et f_2 dans $\mathcal{C}_m(]\![a,b]\![,\mathbb{R})$

— Le résultat est différent si on utilise la relation de Chasles au lieu de la linéarité. Pour c dans $]a,b[$, l'intégrale :

$$\int_a^b f \quad = \quad \int_a^c f + \int_c^b f$$

converge si et seulement si les deux intégrales de droite convergent. En particulier si les deux intégrales de droite divergent, on peut conclure à la divergence de $\int_a^b f$.

— Chaque fois que l'on utilise la linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b f_1 + f_2 \quad = \quad \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2$$

il faut s'assurer que les deux intégrales convergent. On peut sinon facilement écrire des bêtises. Par exemple :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{x} dx && \text{Là les deux intégrales divergent !} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-X}}{X} dX && \text{En posant X=2x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Alors que cette intégrale est clairement strictement positive car la fonction $x \mapsto \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$ est continue et strictement positive que $]0,+\infty[$.

Exercice. [32] Déterminer la nature de : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin(x)}{x}\right) dx$

Exercice. [33] Étudier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \sin(x)} dx$

IV. Espaces de fonctions et intégration.

IV.1. Espace vectoriel des fonctions intégrables.

Définitions. Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On note :

$$L^1(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}) \ / \ \int_a^b |f| \ \text{convergente} \right\}$$

$$L_c^1(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \ / \ \int_a^b |f| \ \text{convergente} \right\}$$

Remarques.

1. $L^1(I,\mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions intégrables sur I.
2. $L_c^1(I,\mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I.

Rappels.

1. Une norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est une application N de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant pour tous x et y de E et pour tout λ de $\mathbb{K}$:
   - $N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation)
   - $N(\lambda.x) = |\lambda|.N(x)$ (homogénéité)
   - $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)
2. Une semi-norme est presque une norme. Il lui manque la séparation.

Théorème.[34]

1. Les espaces $L^1(I,\mathbb{K})$, $L_c^1(I,\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
2. $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f|$ est une norme sur $L_c^1(I,\mathbb{K})$ et une semi-norme sur $L^1(I,\mathbb{K})$.

IV.2. Espace vectoriel des fonctions de carré intégrable.

Définitions. Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On note :

$$L^2(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}) \ / \ \int_a^b |f|^2 \ \text{convergente} \right\}$$

$$L_c^2(I,\mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \ / \ \int_a^b |f|^2 \ \text{convergente} \right\}$$

Rappels.

1. Un produit scalaire euclidien ϕ d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x de $\mathbb{R}$:
   - ϕ bilinéaire,
   - $\phi(x,y) = \phi(y,x)$ (symétrie)
   - $\phi(x,x) \geq 0$ (positivité)
   - $\phi(x,x) = 0 \iff x = 0$ (défini)
2. Un semi-produit scalaire euclidien est presque un produit scalaire. Il lui manque le caractère défini.

Théorème.[35]

1. Les espaces $L^2(I,\mathbb{K})$ et $L^2_c(I,\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
2. $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ est une norme sur $L^2_c(I,\mathbb{K})$ et une semi-norme sur $L^2(I,\mathbb{K})$.
3. $\langle f,g\rangle = \int_a^b fg$ est un produit scalaire sur $L^2_c(I,\mathbb{R})$ et un semi-pse sur $L^2(I,\mathbb{K})$