Intégrales à paramètres.

PSI

Chapitre 8

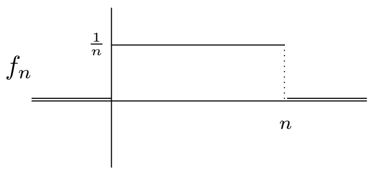
I. Paramètre entier dans l'intégrale.

I.1. Problématique

Que cherche-t-on à faire ? On va chercher des hypothèses suffisantes pour pouvoir intervertir les symboles lim et $\int$, c'est-à-dire quelles conditions doit-on avoir sur une suite d'applications (f_n) définies d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ pour avoir

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n$$

Le contre-exemple suivant montre que la question est pertinente puisqu'il existe des cas où l'inversion est impossible :



$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad x \in [0,n] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0,n] \end{cases}$$

On a donc et $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n = 1$ et $\int_0^{+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = 0$.

I.2. Rappel : le cas d'une CU sur un segment.

Théorème - version suite.[1] Si (f_n) est une suite d'applications continues définies d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n$$

Théorème - version série.[2] Si $\sum f_n$ est une série d'applications continues définies d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Ce théorème est appelé "Théorème d'intégration terme à terme - version CU sur un segment".

Remarque. Ce théorème est un rappel. Voir toutes les informations sur ce théorème et les exemples dans le chapitre suite de fonctions.

I.3. Théorème de convergence dominée.

Théorème.[3] Soient f et f_n des application de I dans $\mathbb{K}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, alors :

$$\exists g \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+), \begin{cases} f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f & \\ \text{Les } f_n \text{ et } f \text{ sont continues par morceaux} & (*) \\ g \text{ intégrable sur } I & (CD) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leq g & (CD) \end{cases}$$

alors les f_n et f sont intégrables et $\displaystyle\int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n$

Remarques.

1. On rappelle que g intégrable sur I signifie $\displaystyle\int_I |g|$ convergente et que si une fonction continue par morceaux f vérifie $|f| \leq g$ avec g intégrable sur I alors f est aussi intégrable sur I.
2. Les hypothèses (CD) sont appelées les hypothèses de domination.
3. Les hypothèses $(*)$ ne sont utiles qu'à donner un sens aux intégrales.
4. Comme dans tout le chapitre la fonction g présente dans les hypothèses de domination est indépendante du paramètre (ici n) et ne dépend donc que de t.

Exercice.[4] Déterminer la limite des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^n} dt \qquad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \qquad K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$$

Exercice.[5] Montrer que le théorème de convergence dominée est une généralisation du théorème du paragraphe précédent, c'est-à-dire montrer grâce au théorème de convergence dominée que si (f_n) est une suite d'applications continues définies d'un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n$$

I.4. Intégration terme à terme.

Remarque. Dans le cas des séries, on peut très bien utiliser le théorème de convergence dominée tel quel. Cependant, il est souvent plus utile d'utiliser la version suivante qui est une conséquence du théorème de convergence dominée. Il a l'avantage de ne pas avoir à trouver une fonction g. On l'appelle le "théorème d'intégration terme à terme - version convergence dominée".

Théorème.[6] Soient f, f_n des applications de I dans $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$), alors :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f \\ \text{Les } f_n \text{ et } f \text{ sont continues par morceaux } ^{(*)} \\ \text{Les intégrales } \displaystyle\int_I |f_n| \text{ sont convergentes pour tout } n \\ \text{La série } \displaystyle\sum \int_I |f_n| \text{ est convergente} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ intégrable} \\ \displaystyle\int_I f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \end{array}\right.$$

Remarques.

1. Contrairement au théorème de convergence dominée, on demande aux f_n d'être intégrables.
2. Les hypothèses $(*)$ ne sont utiles que pour donner un sens aux intégrales.
3. Puisque ce théorème se démontre à l'aide du théorème de convergence dominée, il est donc moins puissant que celui-ci quoique plus simple à utiliser. L'exercice suivant montre cependant qu'on est parfois obligé de revenir au théorème de convergence dominée.

Exercice.[7] Pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout x de $[0,1]$, on pose : $f_n(x) = (-x^2)^n$. On cherche à savoir si :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

1. Montrer que $\sum \int_0^1 |f_n|$ est divergente. En déduire qu'on ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme.
2. Montrer que pour tout N de $\mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|\sum_{n=0}^{N} f_n(x)\right| \leq 1$$

   En déduire que l'on peut utiliser le théorème de convergence dominée, et que l'on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice.[8]

1. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$

2. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$$

I.5. Application au calcul d'intégrales.

Remarque. Comme le montre l'exemple suivant, pour calculer une intégrale, il est parfois judicieux de faire apparaitre une série de fonction et d'intervertir les symbole $\int$ et $\sum$.

Exercice.[9] En faisant apparaitre une série géométrique, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}$$

II. Paramètre réel dans l'intégrale.

II.1. Problématique

Que cherche-t-on à faire ? Soient D et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides. Dans ce paragraphe, on cherche à pouvoir étudier une fonction définie par une intégrale, c'est-à-dire une application du type :

$$F(x) = \int_I f(x,t)dt$$

variable de la fonction   Variable d'intégration

avec $(x,t) \mapsto f(x,t)$ une application de $D \times I$ dans $\mathbb{K}$.

II.2. Limite

Théorème de convergence dominée à paramètre continu. [10] Considérons des fonctions f et F comme dans la problématique du début de paragraphe. Notons de plus a dans $\overline{D}$ et l une application de I dans $\mathbb{R}$.

$$\exists g \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}^+), \begin{cases} f(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l(t) & \\ t \mapsto f(x,t) \text{ et } t \mapsto l(t) \text{ sont continues par morceaux} & (*) \\ g \text{ intégrable sur } I & (CD) \\ \forall (x,t) \in D \times I,\ |f(x,t)| \leq g(t) & (CD) \end{cases}$$

alors l est intégrable et $\displaystyle\int_I \lim_{x \to a} f(x,t) = \lim_{x \to a} \int_I f(x,t)$

Remarques.

1. Ainsi, pour trouver la limite d'une fonction définie par une intégrale, on utilise le théorème de convergence dominée à paramètre continu.
2. C'est exactement le même théorème que le théorème de convergence dominée en remplaçant les n par des x.
3. Les hypothèses (CD) sont les hypothèses de domination.
4. Les hypothèses $(*)$ ne sont utiles qu'à donner un sens aux intégrales.
5. La fonction g présente dans les hypothèses de domination est indépendante du paramètre (ici x) et ne dépend donc que de t.

Exercice. [11] Considérons la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(y)}{x^2+y^2}dy$$

1. Déterminer le domaine de définition de F.
2. Déterminer les limites de F aux bornes de son domaine de définition.

II.3. Continuité et dérivabilité.

Théorème - Continuité. [12] Avec les notations de f et F de début de paragraphe, si pour tout segment $[a,b]$ de D, il existe g dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\begin{cases} x \mapsto f(x,t) \text{ est continue pour tout } t \text{ de } I & \\ t \mapsto f(x,t) \text{ continue par morceaux pour tout } x \text{ de } D & (*) \\ \forall x \in [a,b] \subset D,\ |f(x,t)| \leq g(t) & (CD) \\ g \text{ intégrable sur } I & (CD) \end{cases}$$

alors F est continue sur D.

Théorème - Dérivabilité. [13] Avec les notations de f et F de début de paragraphe, si pour tout segment $[a,b]$ de D, il existe g dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\begin{cases} x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^1 \text{ pour tout } t \text{ de } I & \\ t \mapsto f(x,t) \text{ continue par morceaux pour tout } x \text{ de } D & (*) \\ t \mapsto f(x,t) \text{ intégrable sur } I & (*) \\ t \mapsto \frac{\delta f}{\delta x}(x,t) \text{ continue par morceaux pour tout } x \text{ de } D & (*) \\ \forall x \in [a,b] \subset D,\ \left|\frac{\delta f}{\delta x}(x,t)\right| \leq g(t) & (CD) \\ g \text{ intégrable sur } I & (CD) \end{cases}$$

alors F est de classe C^1 sur D et $F'(x) = \int_I \frac{\delta f}{\delta x}(x,t)dt$

Attention ! En pratique, dans les deux théorèmes précédents, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment $[a,b]$ de D (ou tout autre intervalle adapté à la situation). En effet montrer qu'une fonction est C^0 ou C^1 sur intervalle D est équivalent à montrer qu'elle est C^0 ou C^1 sur tout segment de cet intervalle.

Remarques.

1. Les conditions $(*)$ sont les conditions qui permettent de donner un sens aux intégrales présentes dans le théorème. Ainsi, à x fixé, toutes les fonctions présentes sous une intégrable doivent être continues par morceaux et intégrables. Une exception près les fonctions inférieures à g en valeur absolue dans (CD) n'ont pas besoin d'être intégrables, puisqu'elles le sont automatiquement.
2. Les conditions (CD) sont les conditions de domination qui permettent d'utiliser le théorème de convergence dominée.
3. Sans les conditions $(*)$, les théorèmes ressemblent à :
   - f C^0 par rapport à la variable x et condition de domination implique F C^0 (par rapport à la variable x).
   - f C^1 par rapport à la variable x et condition de domination implique F C^1 (par rapport à la variable x).
4. La fonction g présente dans les hypothèses de domination est indépendante du paramètre (ici x) et ne dépend donc que de t.

Exercice - intégrale de Gauss.[14] Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$$

1. Montrer que F est dérivable et calculer F'.
2. Calculer $F(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
3. Posons $g(x) = F(x^2)$. Calculer g' puis en déduire que :

$$g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2 dt}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

4. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

II.4. Caractère C^p.

Théorème.[15] Soit p dans $\mathbb{N}$. Avec les notations de f et F de début de paragraphe, si pour tout segment $[a,b]$, il existe une fonction g dans $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R}^+)$ telles que :

$$\begin{cases} x \mapsto f(x,t) \text{ est de classe } C^p \text{ pour tout } t \text{ de } I & \\ \forall j \in [\![0,p]\!],\ \forall x \in D,\ t \mapsto \frac{\delta^j f}{\delta x^j}(x,t) \text{ continue par morceaux.} & (*) \\ \forall j \in [\![0,p-1]\!],\ \forall x \in D,\ t \mapsto \frac{\delta^j f}{\delta x^j}(x,t) \text{ intégrable.} & (*) \\ \forall x \in [a,b] \subset D,\ \left|\frac{\delta^p f}{\delta x^p}(x,t)\right| \leq g(t) & (CD) \\ g \text{ intégrable sur } I & (CD) \end{cases}$$

alors F est de classe C^p sur D et $F^{(p)}(x) = \int_I \frac{\delta^p f}{\delta x^p}(x,t)dt$

Remarque.

1. En pratique, comme dans les deux théorèmes précédents, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de D (ou tout autre intervalle adapté à la situation).
2. Si $p = 0$ ou si $p = 1$, on retrouve les deux théorèmes du paragraphe précédent.
3. Si on veut montrer que la fonction F est C^∞, on montre qu'elle est C^p pour p quelconque dans $\mathbb{N}$.

Exercice - théorème de division.[16] Soit f une application de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $f(0)=0$. Notons g la fonction $\frac{f(x)}{x}$ prolongée par continuité en 0.

1. Que vaut $g(0)$? Montrer que $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[-1;1]$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(xt)dt$
3. Montrer que g est C^∞ sur $[-1;1]$, puis sur $\mathbb{R}$.

II.5. Fonction Gamma d'Euler.

Exercice - La fonction Gamma.[17] La fonction gamma d'Euler est définie par :

$$\Gamma(x) \quad = \quad \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

On notera $f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$

1. Montrer que, pout tout p de $\mathbb{N}$, l'intégrale :

$$I_p(x) \quad = \quad \int_0^{+\infty} \ln^p(t)e^{-t}t^{x-1}dt$$

   est absolument convergente pour x dans $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in]0;+\infty[,\ \ t^{x-1} \ \le\ t^{a-1}+t^{b-1}$$

3. Montrer que Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut $\Gamma^{(p)}$ pour p dans $\mathbb{N}$?
4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \Gamma(x+1) \ = \ x\Gamma(x)$. En déduire que la fonction Γ prolonge la factorielle c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Gamma(n+1) = n!$$

5. Montrer que $\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$. Tracer la courbe.

III. Paramètre sur les bornes de l'intégrale

III.1. Rappel : théorème fondamental de l'analyse.

Théorème - TFA.[18] Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ alors :

$$F(x) \quad = \quad \int_c^x f(t)dt$$

est une primitive de f pour toute valeur c de $[a,b]$.

Méthode. Pour dériver une application F de la forme :

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$$

avec f continue et u, v C^1 :

1. On pose $F(x) = \displaystyle\int_c^x f(t)dt$ (c arbitraire dans le domaine de définition de f). D'après le TFA, $F'(x) = f(x)$.
2. On exprime G en fonction de F, u et v :

$$G(x) = F(v(x)) - F(u(x))$$

3. G est donc dérivable comme composée/somme de fonctions dérivables et :

$$G'(x) = f(v(x)).v'(x) - f(u(x)).u'(x)$$

Exercice.[19] Étudier la fonction définie par :

$$f(x) = \int_0^{\sin^2(x)} \mathrm{Arcsin}(\sqrt{t})dt + \int_0^{\cos^2(x)} \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})dt$$

III.2. Paramètre sur les bornes et dans l'intégrale.

Méthode. Lorsqu'un paramètre apparait à l'intérieur de l'intégrale et sur les bornes Il existe deux idées principales :

1. On effectue un changement de variable pour enlever la variable soit sur les bornes de l'intégrale, soit à l'intérieur.
2. On prolonge la fonction sous l'intégrale par 0, pour qu'elle soit définie sur un ensemble fixe.

Exercice - Cesàro intégrale.[20] Soit f une application continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de limite l. Posons :

$$c_n = \frac{1}{n}\int_0^n f(t)dt$$

Montrer que $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Exercice - Gauss avec Wallis.[21] Le but de l'exercice est de déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ à l'aide des intégrales de Wallis. On rappelle la définition des intégrales de Wallis, ainsi qu'un équivalent :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx \qquad\qquad W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Pour cela considérons l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt$$

1. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I$.
2. Montrer que $I_n = \sqrt{n}W_{2n+1}$. En déduire la valeur de I